Kapitel 2

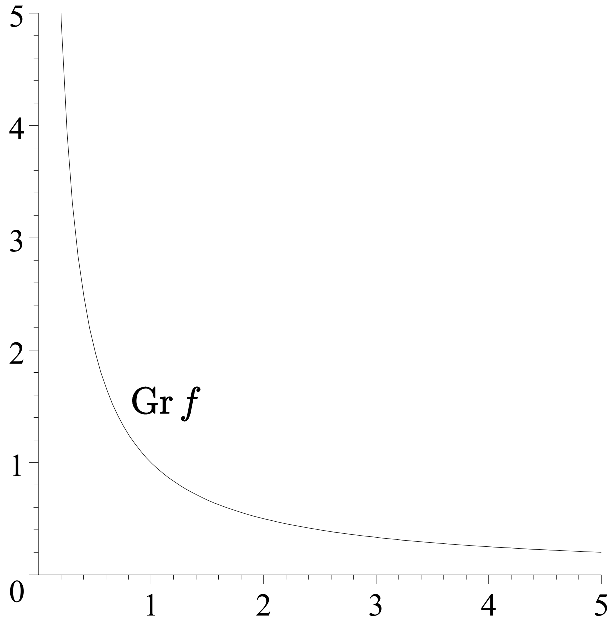
KONVERGENZ

Fassung vom 1. Juni 2005

2.1 Grenzwerte

Dies ist der zentrale Begriff der Analysis.

BEISPIEL 1 Sei $f := \frac{1}{\mathrm{id}} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$.



Ist x "nahe bei 0 ", so ist $f(x)$ "nahe bei ∞ " und ist x "nahe bei ∞ ", so ist $f(x)$ "nahe bei 0 ". Wie sollen wir diesen Begriff "nahe bei" präzisieren ?

DEFINITION 1 Es sei $r \in \mathbb{R}_+^*$ gegeben. Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$U_r(x) := [x - r, x + r]$$

und

$$U_r(\infty) := [r, \infty] \quad , \quad U_r(-\infty) := [-\infty, -r] \ .$$

(a) Wir sagen, daß $y \in \overline{\mathbb{R}}$ liegt r-*nahe* bei $x \in \overline{\mathbb{R}}$, falls gilt

$$y \in U_r(x) \ ,$$

d.h. für

(i) $x \in \mathbb{R}$, falls

$$x - r \leqslant y \leqslant x + r \ ,$$

Claude Portenier
Wolfgang Gromes

(ii) $x = \infty$, falls
$$r \leqslant y \ ,$$

(iii) $x = -\infty$, falls
$$y \leqslant -r \ .$$

(b) Eine Menge $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt *Umgebung* von $x \in \overline{\mathbb{R}}$, falls $r \in \mathbb{R}_+^*$ existiert, so daß
$$V \supset U_r(x) \ .$$

(c) Ist $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, so sei $\overline{A}$ der *Abschluß* von A die Menge aller $x \in \overline{\mathbb{R}}$, so daß für jede Umgebung V von x gilt
$$A \cap V \neq \emptyset$$
oder für alle $r \in \mathbb{R}_+^*$ gilt
$$A \cap U_r(x) \neq \emptyset \ .$$

BEMERKUNG 1 Wichtig sind kleine Umgebungen. Wenn man in $\mathbb{R}$ arbeitet, benutzt man ε statt r . In diesem Fall sind die ε-Umgebungen klein für kleine $\varepsilon > 0$. Für $\pm\infty$ sind die r-Umgebungen klein für große r .

BEMERKUNG 2 Es gilt immer
$$A \subset \overline{A} \ .$$

BEISPIEL 2 Sind V_1 und V_2 Umgebungen von $x \in \overline{\mathbb{R}}$, so ist $V_1 \cap V_2$ eine Umgebung von x .

Seien für $j = 1, 2$ reelle Zahlen $r_j > 0$, so daß $U_{r_j}(x) \subset V_j$. Ist $x \in \mathbb{R}$, so definiere $r := \min(r_1, r_2)$. Dann gilt
$$[x - r, x + r] = [x - r_1, x + 1] \cap [x - r_2, x + r_2] \subset V_1 \cap V_2 \ .$$
Ist $x = \infty$, so definiere $r := \max(r_1, r_2)$. Dann gilt
$$[r, \infty] = [r_1, \infty] \cap [r_2, \infty] \subset V_1 \cap V_2 \ .$$
Analog für $x = -\infty$. □

BEISPIEL 3 Es ist
$$\overline{]0, 1[} = [0, 1] \ .$$

Denn : Ist $x > 1$, so ist $U_{x-1}(x) = [1, 2x - 1]$ disjunkt von $]0, 1[$, also $x \notin \overline{]0, 1[}$. Analog für $x < 0$. Schließlich für alle $r \in \mathbb{R}_+^*$ ist $U_r(1) \cap]0, 1[\ni 1 - \min\left(r, \frac{1}{2}\right)$, also $1 \in \overline{]0, 1[}$. Analog für 0 . □

DEFINITION 2 Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a \in \overline{D}$. Dann heißt $b \in \overline{\mathbb{R}}$ *Grenzwert* oder *Limes* von f *für* x *gegen* a , wenn gilt :

Zu jeder Umgebung V von b existiert eine Umgebung U von a mit
$$x \in D \cap U \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in V \ ,$$

d.h.

$$f(D \cap U) \subset V \ ,$$

oder für jedes $r > 0$ existiert ein $s > 0$ mit

$$x \in D \cap U_s(a) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in U_r(b) \ ,$$

d.h.

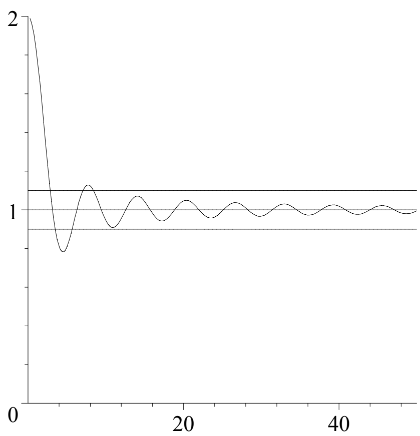
$$f(D \cap U_s(a)) \subset U_r(b) \ .$$

Man schreibt dann

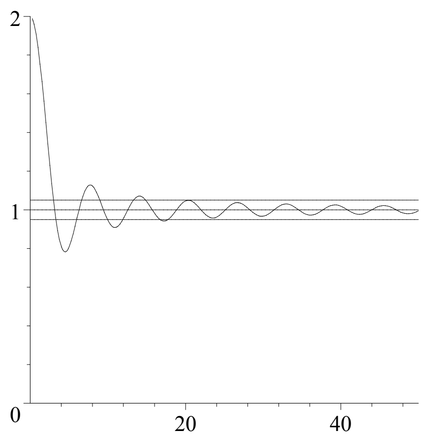
$$b = \lim_{D \ni x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{oder} \quad f(x) \to b \text{ für } x \to a \ (\ x \in D\ ).$$

BEMERKUNG 3 Die erste Formulierung hat eher geometrischen Charakter, während die zweite eine analytische Interpretation liefert.

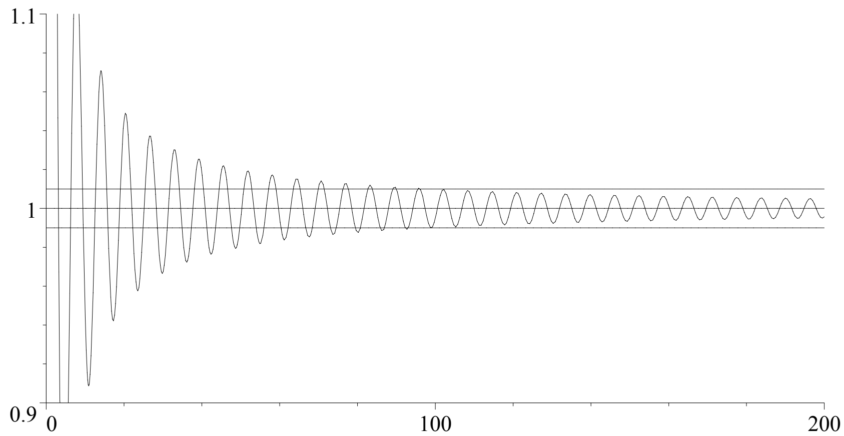
BEISPIEL 4 Für die Funktion $1 + \frac{\sin}{\mathrm{id}} : x \longmapsto 1 + \frac{\sin x}{x} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert $1 + \frac{\sin x}{x}$ gegen 1 für x gegen ∞ :



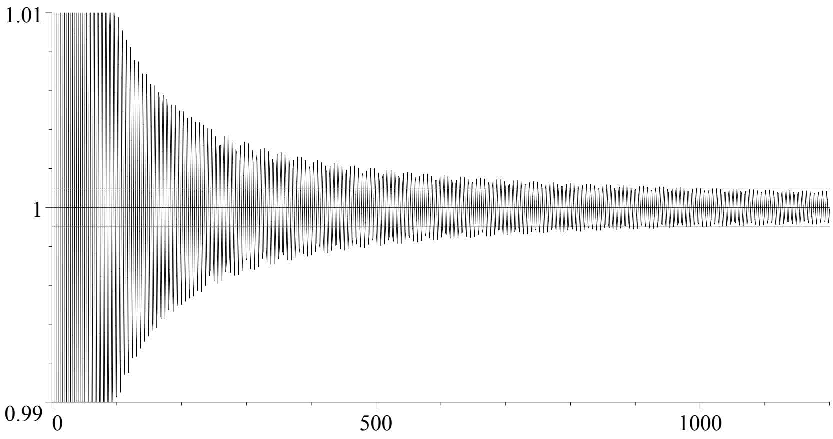
$\varepsilon = 0,1$ und $r \geqslant 10$



$\varepsilon = 0,05$ und $r \geqslant 20$



$\varepsilon = 0,01$ und $r \geqslant 100$



$\varepsilon = 0,001$ und $r \geqslant 1000$

BEISPIEL 5 Seien $D \subset \left]0, \infty\right[$ mit $0, \infty \in \overline{D}$ und

$$\frac{1}{\mathrm{id}} : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x} \ .$$

Es gilt

$$\lim\nolimits_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{id}}(x) = \lim\nolimits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim\nolimits_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{id}}(x) = \lim\nolimits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \ .$$

Für die erste Aussage sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Gesucht ist ein $r > 0$ mit

$$x \in D \cap U_r(\infty) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{id}}(x) \in U_\varepsilon(0) \ .$$

Da $\frac{1}{x} \geqslant 0$ für alle $x \in D$, sind folgende Aussagen sukzessiv äquivalent :

$$\frac{1}{\mathrm{id}}(x) \in U_\varepsilon(0)$$

$$\frac{1}{x} \leqslant \varepsilon$$

$$x \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \ .$$

Für $r = \frac{1}{\varepsilon}$ folgt aus $x \in D \cap U_r(\infty)$, d.h. $x \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, daß $\frac{1}{\mathrm{id}}(x) \in U_\varepsilon(0)$. Man beachte, daß r von ε abhängt.

Für die zweite Aussage sei jetzt $r > 0$ gegeben. Gesucht ist ein $\varepsilon > 0$ mit

$$x \in D \cap U_\varepsilon(0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{id}}(x) \in U_r(\infty) \ .$$

Da $\frac{1}{x} \geqslant 0$ für alle $x \in D$, sind folgende Aussagen sukzessiv äquivalent :

$$\frac{1}{\mathrm{id}}(x) \in U_r(\infty)$$

$$\frac{1}{x} \geqslant r$$

$$x \leqslant \frac{1}{r} \ .$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{r}$ folgt aus $x \in D \cap U_{\varepsilon}(0)$, d.h. $x \leqslant \frac{1}{r}$, daß $\frac{1}{\mathrm{id}}(x) \in U_r(\infty)$. Man beachte, daß ε von r abhängt. $\square$

2.2 Rechenregeln für Grenzwerte

DEFINITION 1 (Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$) Für $c \in \overline{\mathbb{R}}$ sei

$$c + \infty = \infty \quad \text{falls } c \neq -\infty \ ,$$

$$c - \infty = -\infty \quad \text{falls } c \neq \infty \ ,$$

$$c \cdot \infty = \infty \quad \text{falls } c > 0 \ ,$$

$$c \cdot \infty = -\infty \quad \text{falls } c < 0 \ ,$$

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0 \quad \text{falls } c \neq \pm\infty \ .$$

Die Fälle

$$\infty - \infty = \infty + (-\infty) \quad , \quad \pm\infty \cdot 0 \quad , \quad \frac{c}{0} \quad , \quad \frac{\pm\infty}{\infty}$$

sind nicht definiert.

Man beachte, daß $\overline{\mathbb{R}}$ kein Körper ist !

HAUPTSATZ *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ und $a \in \overline{D_f}$.* ***Existieren*** $\lim_{x \to a} f(x)$ ***und*** $\lim_{x \to a} g(x)$ ***und ist die rechte Seite in*** $\overline{\mathbb{R}}$ ***oder*** $\mathbb{C}$ ***definiert,*** *so gilt :*

(i) ***Faktorregel***

$$\lim_{x \to a} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \to a} f(x) \ .$$

(ii) ***Summenregel***

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \ .$$

(iii) ***Produktregel***

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \ .$$

(iv) ***Quotientenregel***

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad , \textit{falls} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0 \ .$$

Falls $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, aber $g > 0$ in einer Umgebung von a , bzw. $g < 0$ in einer Umgebung V von a , so gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \cdot \lim_{x \to a} f(x) \quad , \textit{falls} \quad \lim_{x \to a} f(x) \neq 0 \ .$$

(v) ***Einsetzungsregel*** *Seien $C \subset \mathbb{R}$, $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \overline{C}$, so daß $h(C) \subset D$, d.h. $f \circ h$ ist definiert. Falls*

$$\lim_{u \to c} h(u) = a \ ,$$

so gilt

$$\lim_{u\to c} f(h(u)) = \lim_{x\to a} f(x) \ .$$

Man sagt auch, daß man die ***Variablenänderung*** $x = h(u)$ *durchgeführt hat.*

Exemplarisch werden die Beweise für (ii) und (iii) in manchen Fälle durchgeführt.

Beweis von (ii) für $b := \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ **und** $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

In diesem Fall ist $\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ definiert. Sei V eine Umgebung von ∞ , z.B. $V = [r, \infty]$, gegeben. Gesucht ist eine Umgebung U von a , so daß

$$x \in U \quad \Longrightarrow \quad f(x) + g(x) \in V \ .$$

Da $f(x)$ gegen $b := \lim_{x\to a} f(x)$ für x gegen a konvergiert, existiert (zu $\varepsilon = 1$) eine Umgebung $U_{f,1}$ von a , so daß

$$x \in U_{f,1} \quad \Longrightarrow \quad b - 1 \leqslant f(x) \leqslant b + 1 \ .$$

Da $g(x)$ gegen ∞ für x gegen a konvergiert, existiert (zu $\max(r, r - b + 1) > 0$) eine Umgebung $U_{g,r}$ von a , so daß

$$x \in U_{g,r} \quad \Longrightarrow \quad g(x) \geqslant \max(r, r - b + 1) \ .$$

Sei jetzt $U := U_{f,1} \cap U_{g,r}$. Diese Menge ist eine Umgebung von a nach Beispiel 2.1.2 und es folgt

$$x \in U \quad \Longrightarrow \quad f(x) + g(x) \geqslant b - 1 + \max(r, r - b + 1) \geqslant r \ .$$

Beweis von (iii) für $b := \lim_{x\to a} f(x)$ **und** $c := \lim_{x\to a} g(x)$ **in** $\mathbb{R}$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung Satz 1.4 gilt :

$$|f(x) \cdot g(x) - b \cdot c| = |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot c + f(x) \cdot c - b \cdot c| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot c| + |f(x) \cdot c - b \cdot c| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x)| \cdot |g(x) - c| + |f(x) - b| \cdot |c| \ .$$

Da $b \cdot c \in \mathbb{R}$, sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $V = [b \cdot c - \varepsilon, b \cdot c + \varepsilon]$. Gesucht wird eine Umgebung U von a , so daß

$$x \in U \quad \Longrightarrow \quad f(x) \cdot g(x) \in [b \cdot c - \varepsilon, b \cdot c + \varepsilon] \ .$$

Zuerst existiert eine Ungebung $U_{f,1}$ von a mit

$$x \in U_{f,1} \quad \Longrightarrow \quad b - 1 \leqslant f(x) \leqslant b + 1 \ .$$

Für diese x gilt dann $|f(x)| \leqslant |b| + 1$. Definiere $d := \max(|b| + 1, |c|)$. Dann existieren Umgebungen $U_{f,\varepsilon,d}$ und $U_{g,\varepsilon,d}$ von a mit

$$x \in U_{f,\varepsilon,d} \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2d} \ .$$

und

$$x \in U_{g,\varepsilon,d} \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - c| \leqslant \frac{\varepsilon}{2d} \ .$$

Für $x \in U := U_{f,1} \cap U_{f,\varepsilon,d} \cap U_{g,\varepsilon,d}$ gilt dann

$$|f(x) \cdot g(x) - b \cdot c| \leqslant |b| + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2d} + \frac{\varepsilon}{2d} \cdot |c| \leqslant \varepsilon \ .$$

□

BEISPIEL 1 Seien $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$ und $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Für konstante Funktionen

$$f : x \longmapsto c : D \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c \ .$$

Diese Funktion wird auch mit c bezeichnet.

Man kann hier zu der gegebene Umgebung V von c die Umgebung U beliebig wählen !

□

BEISPIEL 2 Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in \overline{D}$. Für die identische Funktion

$$\mathrm{id} : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x$$

gilt

$$\lim_{x \to a} \mathrm{id}(x) = \lim_{x \to a} x = a \ .$$

Hier braucht man nur zu der gegebene Umgebung V von a die Umgebung $U := V$ zu wählen. □

BEISPIEL 3 Beispiel 2.1.5 kann man wieder nachrechnen : Nach Hauptsatz (iv) gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{\lim_{x \to \infty} 1}{\lim_{x \to \infty} x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

und

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{\lim_{x \to 0} 1}{\lim_{x \to 0} x} = \infty \cdot 1 = \infty \ .$$

BEISPIEL 4 Nach vorigem Beispiel und Hauptsatz (ii) gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} + 1 = 0 + 1 = 1 \ .$$

Die Rechnung

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1+x}{x} = \frac{\lim_{x \to \infty} (1+x)}{\lim_{x \to \infty} x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{undefiniert}$$

geht nicht auf !

BEISPIEL 5 Sei

$$f : \mathbb{R} \smallsetminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{4x^4 + 3x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2 \cdot (x-2)^2} \ .$$

Wie im vorigen Beispiel soll man durch die höchste Potenz dividieren :

$$\lim\nolimits_{x\to\infty} \frac{4x^4 + 3x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2 \cdot (x-2)^2} = \lim\nolimits_{x\to\infty} \frac{4 + 3x^{-2} - 2x^{-3} + x^{-4}}{(1+2x^{-1})^2 \cdot (1-2x^{-1})^2} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 4 + 3\left(\lim_{x\to\infty} x^{-1}\right)^2 - 2\left(\lim_{x\to\infty} x^{-1}\right)^3 + \left(\lim_{x\to\infty} x^{-1}\right)^4}{\left(1 + 2\lim_{x\to\infty} x^{-1}\right)^2 \cdot \left(1 - 2\lim_{x\to\infty} x^{-1}\right)^2} =$$

$$= \frac{4 + 3\cdot 0 - 2\cdot 0 + 0}{(1+2\cdot 0)^2 \cdot (1-2\cdot 0)^2} = 4 \ .$$

BEISPIEL 6 Seien $D \subset \mathbb{R}_+$ mit $0, \infty \in \overline{D}$ und

$$\sqrt{\mathrm{id}} : x \longmapsto \sqrt{x} : D \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Es gilt

$$\lim\nolimits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty \quad \text{und} \quad \lim\nolimits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \ .$$

Denn : Für eine gegebene Umgebung $V = [r, \infty]$ von ∞ sei $U := [r^2, \infty]$. Aus $x \in D \cap U$ folgt $x \geqslant r^2$, also $\sqrt{x} \geqslant r$ aus Bemerkung 1.4.6, d.h. $\sqrt{x} \in V$. Analog ist $V = [-\varepsilon, \varepsilon]$ eine Umgebung von 0 so definiert man $U := [-\varepsilon^2, \varepsilon^2]$. Aus $x \in D \cap U$ folgt $x \leqslant \varepsilon^2$, also $\sqrt{x} \leqslant \varepsilon$ aus Bemerkung 1.4.6, d.h. $\sqrt{x} \in V$. Man hätte auch rechnen können

$$\lim\nolimits_{x\to 0} \sqrt{x} = \lim\nolimits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}}} \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\nolimits_{y\to\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\lim_{y\to\infty} \sqrt{y}} = \frac{1}{\infty} = 0 \ ,$$

da $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ nach Beispiel 2.1.5. □

BEISPIEL 7 Sei

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Um $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$ zu berechnen führt man die Variablenänderung $y = \frac{x^2+1}{x}$ und rechnet zuerst

$$\lim\nolimits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim\nolimits_{x\to\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \lim\nolimits_{x\to\infty} x + \lim\nolimits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \infty + 0 = \infty \ .$$

Mit Satz (v) und dem vorigen Beispiel folgt

$$\lim\nolimits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = \lim\nolimits_{y\to\infty} \sqrt{y} = \infty \ .$$

□

DEFINITION 2 Sei $f : D_f \longrightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion mit Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$. Man betrachte die reellwertigen Funktionen

$$\operatorname{Re} f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{Re} f(x)$$

und

$$\operatorname{Im} f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{Im} f(x) \ .$$

Man sagt, daß f einen *Grenzwert* oder ein *Limes für x gegen a* $\in \overline{D_f}$ in $\mathbb{C}$ hat, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Grenzwerte in $\mathbb{R}$ haben. Dieser Grenzwert ist

$$\lim_{x\to a} f(x) := \lim_{x\to a} \operatorname{Re} f(x) + i \cdot \lim_{x\to a} \operatorname{Im} f(x) \ .$$

Die Rechenregeln sind noch gültig für Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, so lange die rechte einen Sinn in $\mathbb{C}$ hat.

2.3 Folgen

DEFINITION 1 Eine *Folge* in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : k \longmapsto a(k) =: a_k \ .$$

Üblicherweise schreibt man $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, \ldots)$. Der erste Index kann auch 1 oder eine beliebige ganze Zahl sein.

BEMERKUNG 1 Achtung : Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung und ist verschieden von

$$\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} = a(\mathbb{N}) \ .$$

Z.B. gilt für die Folge $\left((-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, daß $\left\{(-1)^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\} = \{\pm 1\}$.

BEISPIEL 1 Die Folge der Primzahlen $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fängt an mit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} = (2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$, aber es gibt keine explizite Formel für die k-te Primzahl p_k !

BEMERKUNG 2 Oft werden Folgen rekursiv definiert in der folgenden Form. Seien gegeben $a \in \mathbb{K}$, eine Teilmenge $D_\Phi \subset \mathbb{K}$ und eine Abbildung $\Phi : D_\Phi \longrightarrow D_\Phi$. Man definiert dann :

$$a_0 := a \quad \text{und} \quad a_{k+1} := \Phi(a_k) \ .$$

BEISPIEL 2 Eine wichtige Folge ist

$$\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\geqslant 1} \ .$$

Sie ist rekursiv definierbar durch

$$a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{k+1} = a_k \cdot \frac{1}{1 + a_k} \ ,$$

da $\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k}}$.

BEISPIEL 3 Seien $a, b \in \mathbb{K}$. Die Folgen in arithmetischer und geometrischer Progression sind definiert durch

$$a_0 := a \quad , \quad a_{k+1} := a_k + b$$

und

$$a_0 := a \quad , \quad a_{k+1} := a_k \cdot b \ .$$

Die erste ist

$$(a + k \cdot b)_{k\in\mathbb{N}} \ ,$$

die zweite

$$\left(a \cdot b^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \ .$$

Z.B. ist die arithmetische Progression für $a = 0$ und $b = 1$ die Folge $\mathrm{id} = (k)_{k\in\mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen und die geometrische Progression für $a = 1$ die Folge der Potenzen von b .

BEISPIEL 4 Seien $x, a \in \mathbb{R}_+^*$ gegeben. Durch

$$a_0 := a \quad \text{und} \quad a_{k+1} := \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{x}{a_k}\right)$$

ist eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ definiert.

Dies folgt durch Induktion, da aus $a_k > 0$ folgt $a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{x}{a_k}\right) > 0$.

DEFINITION 2 Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leqslant x\} \ .$$

Diese ganze Zahl nennt man die *(untere) Gaußklammer* von x . Die *obere Gaußklammer* ist

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geqslant x\} \ .$$

Diese Zahlen existieren nach Beispiel 1.5.2.

LEMMA *Es gilt* $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Für jedes $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{N}$ ist das Intervall $\left[\frac{x+\lfloor x\rfloor}{2}, \frac{x+1+\lfloor x\rfloor}{2}\right]$ eine Umgebung von x und

$$\left[\frac{x+\lfloor x\rfloor}{2}, \frac{x+1+\lfloor x\rfloor}{2}\right] \cap \mathbb{N} = \emptyset \ .$$

Das Intervall $[-\infty, 1]$ ist eine Umgebung von $-\infty$ und $[-\infty, 1] \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Dagegen für jedes $r > 0$ gilt $[r, \infty] \cap \mathbb{N} \ni \lfloor r \rfloor + 1$. □

DEFINITION 3 Eine Folge $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt *konvergent* wenn

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} a(k)$$

existiert und in $\mathbb{R}$ liegt, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|a_k - \lim_{k\to\infty} a_k\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geqslant N_\varepsilon \ .$$

Falls $\lim_{k\to\infty} a_k = \pm\infty$, so sagt man, daß $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergent* ist, ansonsten daß sie *divergent* ist.

Eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt *konvergent* , wenn die Folgen $(\mathrm{Re}\, z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mathrm{Im}\, z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent sind und man schreibt

$$\lim_{k\to\infty} z_k := \lim_{k\to\infty} \mathrm{Re}\, z_k + i \cdot \lim_{k\to\infty} \mathrm{Im}\, z_k \ .$$

Gilt $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$, so heißt $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Nullfolge* .

BEMERKUNG 3 Genau dann konvergiert $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gegen $a_\infty := \lim_{k\to\infty} a_k$, wenn

$$\lim_{k\to\infty} |a_k - a_\infty| = 0 ,$$

d.h. wenn $(|a_k - a_\infty|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergent, so gilt

$$\operatorname{Re}(\lim_{k\to\infty} z_k) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} z_k \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\lim_{k\to\infty} z_k) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} z_k .$$

BEMERKUNG 4 Da eine Folge eine spezielle Funktion ist (sie ist auf $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ definiert), gelten die Rechenregeln aus Hauptsatz 2.1. Zusätzlich gilt

LEMMA *Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.*

(i) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}_+$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$ mit $b_k \leqslant a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(ii) Genau dann konvergiert $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $z_\infty \in \mathbb{K}$, wenn $(|z_k - z_\infty|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. In diesem Fall gilt

$$|\lim_{k\to\infty} z_k| = |z_\infty| = \lim_{k\to\infty} |z_k| .$$

(iii) Ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{K}$ und $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, so daß $|w_k| \leqslant |z_k|$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis von (i). Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a_k \leqslant \varepsilon$ für alle $k \geqslant N_\varepsilon$. Für alle diese n gilt nach Voraussetzung trivialerweise $b_k \leqslant \varepsilon$; damit ist bewiesen, daß $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$ gilt.

Beweis von (ii). $(\Rightarrow)$ Nach Definition gilt $\operatorname{Re} z_\infty = \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} z_k$ und $\operatorname{Im} z_\infty = \lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} z_k$, also

$$\lim_{k\to\infty} |z_k - z_\infty|^2 = \lim_{k\to\infty} \left[(\operatorname{Re}[z_k - z_\infty])^2 + (\operatorname{Im}[z_k - z_\infty])^2\right] =$$

$$= (\lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} z_k - \operatorname{Re} z_\infty)^2 + (\lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} z_k - \operatorname{Im} z_\infty)^2 = 0 .$$

Man betrachte jetzt die Variablenänderung $y = |z_k - z_\infty|^2$ oder präziser

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow D := \left\{ |z_k - z_\infty|^2 \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\} : k \longmapsto |z_k - z_\infty|^2 .$$

Wir haben eben bewiesen, daß $\lim_{k\to\infty} f(k) = 0$ ist, also $0 \in \overline{D}$. Mit Hauptsatz 2.2.v folgt dann

$$\lim_{k\to\infty} |z_k - z_\infty| = \lim_{k\to\infty} \sqrt{|z_k - z_\infty|^2} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{f(k)} \underset{y=f(k)}{=} \lim_{D\ni y\to 0} \sqrt{y} = 0 .$$

$(\Leftarrow)$ Da für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\operatorname{Re} z_k - \operatorname{Re} z_\infty| , |\operatorname{Im} z_k - \operatorname{Im} z_\infty| \leqslant |z_k - z_\infty|$$

folgt mit (i), daß $(|\operatorname{Re} z_k - \operatorname{Re} z_\infty|)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(|\operatorname{Im} z_k - \operatorname{Im} z_\infty|)_{k\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen sind. Mit der Bemerkung 3 folgt, daß $\operatorname{Re} z_\infty = \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} z_k$ und $\operatorname{Im} z_\infty = \lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} z_k$, d.h. $z_\infty = \lim_{k\to\infty} z_k$.

Die Vierecksungleichung zeigt, daß

$$\Big| |z_k| - |z_\infty| \Big| \leqslant |z_k - z_\infty| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \,.$$

Konvergiert $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen z_∞ zeigt die Implikation $(\Rightarrow)$, daß $(|z_k - z_\infty|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Aus (i) folgt somit, daß $\Big(\Big| |z_k| - |z_\infty| \Big|\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ auch eine ist. Mit Hilfe der Implikation $(\Leftarrow)$ ergibt sich die Behauptung.

Beweis von (iii). Dies ergibt sich sofort aus (i) und (ii). □

BEISPIEL 5 Es gilt $\lim_{k\to\infty} k = \infty$ und $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, d.h. $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ ist eine Nullfolge.

Die erste Aussage folgt aus Beispiel 2.2.2. Für die zweite wendet man Hauptsatz 2.2.iv an. □

BEISPIEL 6 Für $z \in \mathbb{C}$ wollen wir das Konvergenzverhalten von $\left(z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ untersuchen.

Fall $z = 0$ Die Folge ist konstant 0 , also konvergiert gegen 0 .
Fall $0 < |z| < 1$ Es gilt $\lim_{k\to\infty} z^k = 0$.
Es ist $\frac{1}{|z|} > 1$, also $\frac{1}{|z|} = 1 + x$ für ein $x \in \mathbb{R}_+^*$. Mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung 1.4 folgt

$$\frac{1}{|z|^k} = (1+x)^k \geqslant 1 + k \cdot x \geqslant k \cdot x$$

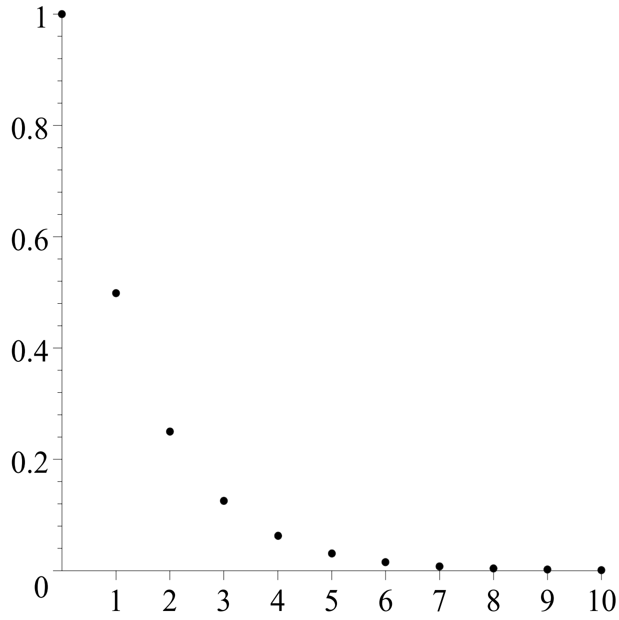
und somit

$$\left|z^k - 0\right| = |z|^k \leqslant \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{k} \,.$$

Nach Beispiel 5, Hauptsatz 2.1.i und Lemma (i) ist $\left(\left|z^k - 0\right|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} z^k = 0$$

nach dem Lemma (ii). Die Konvergenz dieser Folge gegen 0 ist sehr schnell.



Die Folge $\left(\frac{1}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$

Fall $z = 1$ Die Folge ist konstant 1 , also konvergiert gegen 1 .

Fall $z = -1$ Die Folge $\left((-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Da

$$\pm 1 \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = U_{\frac{1}{2}}(0)$$

kann 0 nicht Limes sein. Für $x \in \mathbb{R}^*$ ist

$$-\operatorname{signum}(x) \cdot 1 \notin [x-1, x+1] = U_1(x) \quad ,$$

also kann auch x nicht Limes sein.

Fall $z \in \left]1, \infty\right[$ Die Folge ist bestimmt divergent (gegen ∞).

sonst Die Folge ist divergent.

DEFINITION 4 Eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* bzw. *monoton fallend* , wenn für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_k \leqslant a_{k+1} \quad \text{bzw.} \quad a_k \geqslant a_{k+1} \; .$$

Sie heißt *beschränkt* , wenn sie nach oben wie nach unten beschränkt ist, d.h. wenn es $m, M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$m \leqslant a_k \leqslant M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \; .$$

Eine komplexe Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn $(|z_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. nach oben beschränkt.

SATZ

(i) *Ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergent, so ist sie beschränkt.*

(ii) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergent und beschränkt nach unten durch m und nach oben durch M , so gilt

$$m \leqslant \lim_{k\to\infty} a_k \leqslant M \ .$$

Beweis von (i). Sei $z_\infty := \lim_{k\to\infty} z_k$. Nach dem Lemma (ii) ist $|z_\infty| = \lim_{k\to\infty} |z_k|$. Es gibt $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|z_k| \in U_1\left(|z_\infty|\right) = \left[|z_\infty| - 1, |z_\infty| + 1\right] \quad \text{für alle } k \geqslant N_1 \ ,$$

d.h.

$$0 \leqslant |z_k| \leqslant |z_\infty| + 1 \quad \text{für alle } k \geqslant N_1 \ .$$

Die Menge $\{\,|z_k| \mid k \in \mathbb{N}\,,\ k < N_1\} \cup \{|z_\infty| + 1\}$ ist endlich, also existiert

$$M := \max\{\,|z_k| \mid k \in \mathbb{N}\,,\ k < N_1\} \cup \{|z_\infty| + 1\} \in \mathbb{R} \ .$$

Dies beweist man sofort durch Induktion. Somit ist bewiesen :

$$0 \leqslant |z_k| \leqslant M \quad \text{für alle } k \geqslant N_1 \ ,$$

d.h. $(|z_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Beweis von (ii). Wäre $a_\infty := \lim_{k\to\infty} a_k > M$, so würde ein $N_{\frac{1}{2}\cdot(a_\infty - M)} \in \mathbb{N}$ existieren, so daß

$$a_{N_{\frac{1}{2}\cdot(a_\infty - M)}} \in U_{\frac{1}{2}\cdot(a_\infty - M)}\left(a_\infty\right) = \left[a_\infty - \frac{1}{2}\cdot(a_\infty - M)\,, a_\infty + \frac{1}{2}\cdot(a_\infty - M)\right] \ ,$$

insbesondere hätte man

$$M \geqslant a_{N_{\frac{1}{2}\cdot(a_\infty - M)}} \geqslant a_\infty - \frac{1}{2}\cdot(a_\infty - M) = \frac{1}{2}\cdot a_\infty + \frac{1}{2}\cdot M > M \ ,$$

ein Widerspruch. Die andere Ungleichung beweist man analog. □

BEMERKUNG 5 Die Umkehrung ist falsch, wie das Beispiel 6 : $\left((-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ zeigt.

Es gilt aber

HAUPTSATZ *Jede monotone und beschränkte Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist konvergent.*
Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \sup\{\,a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \ .$$

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Nach dem Satz von Dedekind 1.5.ii existiert

$$a_\infty := \sup\{\,a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \ .$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es nach der Approximationseigenschaft 1.5.i ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß $a_{k_\varepsilon} > a_\infty - \varepsilon$. Aber $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also gilt

$$a_\infty + \varepsilon \geqslant a_\infty \geqslant a_k \geqslant a_{k_\varepsilon} \geqslant a_\infty - \varepsilon \quad \text{für alle } k \geqslant k_\varepsilon$$

und somit

$$a_k \in U_\varepsilon\left(x_\infty\right) \quad \text{für alle } k \geqslant k_\varepsilon \ .$$

Dies zeigt, daß $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x_∞ konvergiert. $\square$

BEISPIEL 7 Wir kehren zum Beispiel 4 zurück. Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$ ist für $x, a \in \mathbb{R}_+^*$ rekursiv definiert durch

$$a_0 := a \quad \text{und} \quad a_{k+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_k + \frac{x}{a_k} \right) .$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{k+1} = a_k + \frac{x - a_k^2}{2a_k} = a_k \cdot \left(1 + \frac{x - a_k^2}{2a_k^2} \right) ,$$

also

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 \cdot \left(1 + \frac{x - a_k^2}{2a_k^2} \right)^2 = a_k^2 \cdot \left(1 + \frac{x - a_k^2}{a_k^2} + \left(\frac{x - a_k^2}{2a_k^2} \right)^2 \right) \geqslant$$

$$\geqslant a_k^2 \cdot \left(1 + \frac{x - a_k^2}{a_k^2} \right) = x$$

und somit

$$a_{k+1} - a_k = \frac{x - a_k^2}{2a_k} \leqslant 0 ,$$

d.h. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt, also beschränkt. Damit ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. Sei $a_\infty := \lim_{k\to\infty} a_k = \inf\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}_+$. Es gilt auch $a_\infty := \lim_{k\to\infty} a_{k+1}$ und aus dem Hauptsatz 2.2 ergibt sich

$$a_\infty = \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(a_k + \frac{x}{a_k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{k\to\infty} a_k + \frac{x}{\lim_{k\to\infty} a_k} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(a_\infty + \frac{x}{a_\infty} \right) .$$

Wäre $a_\infty = 0$, so hätte man

$$a_\infty = \frac{1}{2} \cdot \left(a_\infty + \frac{x}{a_\infty} \right) = \frac{1}{2} \cdot (a_\infty + \infty \cdot x) = \infty ,$$

ein Widerspruch. Also ist $a_\infty > 0$ und es folgt

$$2 \cdot a_\infty^2 = a_\infty^2 + x \quad \text{, d.h.} \quad x = a_\infty^2 ,$$

oder $a_\infty = \sqrt{x}$.

BEMERKUNG 6 Die Konvergenz dieses Verfahrens um eine Wurzel zu berechnen ist sehr schnell.

BEMERKUNG 7 Ähnlich folgt : Ist $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geqslant 2$, $x, a \in \mathbb{R}_+^*$ und $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 := a \quad \text{und} \quad a_{k+1} := \frac{1}{p} \cdot \left((p-1) \cdot a_k + \frac{x}{a_k^{p-1}} \right) \ ,$$

so konvergiert $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt[p]{x}$.

2.4 Reihen

Aus Folgen durch Summation enstehen Reihen.

DEFINITION 1 Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\subset \mathbb{K}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert man die *k-te Partialsumme*

$$s_k := \sum_{l\in k} z_l = \sum_{l=0}^{k-1} z_l \ .$$

Statt der Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schreibt man $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ und ist die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, so heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *konvergent* . Man schreibt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k := \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{l\in k} z_l$$

und nennt diese Zahle die *Summe der Reihe* . Ist $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergent, so heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *divergent* .

Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ hat also bei Konvergenz zwei Bedeutungen : die Reihe selbst und die Summe dieser Reihe.

BEISPIEL 1 (Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die geometrische Reihe konvergent und ihre Summe ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \ .$$

Für $|z| \geqslant 1$, $z \neq 1$ ist diese Reihe divergent. Für $z = 1$ ist sie bestimmt divergent.

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ sind die Partialsumme dieser Reihe gegeben durch

$$s_k = \sum_{l\in k} z^l = \frac{1-z^k}{1-z}$$

(vgl. Beispiel 1.3.1). Nach Beispiel 2.3.6 gilt

$$\lim_{k\to\infty} z^k = 0 \quad \text{für } |z| < 1 \ ,$$

also folgt aus Hauptsatz 2.2, daß die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, d.h. die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist konvergent und ihre Summe ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-z^k}{1-z} = \frac{1-\lim_{k\to\infty} z^k}{1-z} = \frac{1}{1-z} \ .$$

Für $|z| \geqslant 1$, $z \neq 1$ ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergent, also auch $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$: würde diese letzte Folge konvergieren, dann aus

$$z^k = 1 + (1-z) \cdot s_k$$

würde man schließen, daß $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Für $z = 1$ ist $s_k = k$ und $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen ∞ .

BEMERKUNG 1 Formales rechnen kann zu Fehlern führen : Man darf z.B. nicht schreiben

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots =$$

$$= (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0$$

$$= 1 + (-1+1) + (-1+1) \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$$

Nur die Betrachtung der Partialsummen

$$s_k = \sum_{l\in k} (-1)^l = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad k \text{ gerade} \\ 1 & \phantom{\text{falls}} \quad k \text{ ungerade} \end{cases} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - (-1)^k\right)$$

macht Sinn.

BEISPIEL 2 Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 \ .$$

Die Berechnung der Partialsummen liefert eine *Teleskopsumme*

$$s_k = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l \cdot (l+1)} = \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} - \sum_{l=2}^{k+1} \frac{1}{l} = 1 - \frac{1}{k+1} \ .$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \lim\nolimits_{k\to\infty} s_k = \lim\nolimits_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \lim\nolimits_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 1 \ .$$

□

BEISPIEL 3 (Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$) Diese Reihe ist bestimmt divergent.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist

$$s_{2^m} = \sum_{l=1}^{2^m} \frac{1}{l} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 1 + 2^0 \cdot \frac{1}{2} + 2^1 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} =$$

$$= 1 + m \cdot \frac{1}{2} \ .$$

Daraus folgt die bestimmte Divergenz gegen ∞ von $(s_k)_{k\geqslant 1}$: Zu $r \in \mathbb{R}_+^*$ existiert eine $m \in \mathbb{N}$ mit $1 + \frac{1}{2} \cdot m \geqslant r$. Definiert man $N_\varepsilon := 2^m$, so gilt für alle $k \geqslant N_\varepsilon$

$$s_k \geqslant s_{2^m} \geqslant 1 + m \cdot \frac{1}{2} \geqslant r \ .$$

□

BEMERKUNG 2 Ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so folgt i.a. **nicht,** daß $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergiert, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt.

Die Umkehrung gilt aber :

SATZ *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ konvergente Reihen und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt*

(i) $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist eine Nullfolge.*

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot z_k)$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} (z_k + w_k)$ *sind konvergent und*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot z_k) = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z_k \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} (z_k + w_k) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k + \sum_{k=0}^{\infty} w_k \ .$$

Beweis von (i). Ist $z := \sum_{k=0}^{\infty} z_k$, so folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|z_k| = |s_{k+1} - s_k| = |s_{k+1} - z + z - s_k| \leqslant |s_{k+1} - z| + |z - s_k|$$

und da $\lim_{k\to\infty} (|s_{k+1} - z| + |z - s_k|) = |\lim_{k\to\infty} s_{k+1} - z| + |z - \lim_{k\to\infty} s_k| = 0$ nach Lemma 2.3.ii, ist die rechte Seite eine Nullfolge, also auch $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 2.3.iii.

Beweis von (ii). Aus den Körper-Gesetze für die Partialsummen und Haupsatz 2.2, (i) und (ii), folgt

$$\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z_k = \alpha \cdot \lim_{k\to\infty} \sum_{l\in k} z_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{l\in k} (\alpha \cdot z_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot z_k)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k + \sum_{k=0}^{\infty} w_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{l\in k} z_l + \lim_{k\to\infty} \sum_{l\in k} w_l =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{l\in k} z_l + \sum_{l\in k} w_l \right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{l\in k} (z_l + w_l) = \sum_{k=0}^{\infty} (z_k + w_k) \ .$$

□

BEMERKUNG 3 Für Produkte siehe § 2.5.

DEFINITION 2 Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ heißt *absolut konvergent* , wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergent ist.

LEMMA *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ absolut konvergent, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ auch konvergent.*

Durch Übergang zum Reell- und Imaginär-Teil der z_k , kann man annehmen, daß $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Ist $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen, so gilt

$$|s_k| = \left|\sum_{l\in k} z_l\right| \leqslant \sum_{l\in k} |z_l| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |z_k| =: R \ ,$$

d.h. $(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [-R, R]$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert also

$$I_m := \inf_{k\geqslant m} s_k$$

nach dem Satz von Dedekind 1.5.ii und $(I_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset [-R, R]$. Wiederum existiert

$$s := \sup_{m\in\mathbb{N}} I_m \ .$$

Nach der Approximationseigenschaft Satz 1.5.i existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$s \geqslant I_{M_\varepsilon} > s - \varepsilon \ ,$$

d.h.

$$s_k \geqslant I_{M_\varepsilon} > s - \varepsilon \quad \text{für alle } k \geqslant M_\varepsilon \ .$$

Analog folgt durch Vertauchung von inf und sup die Existenz eines $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$s_k < s + \varepsilon \quad \text{für alle } k \geqslant N_\varepsilon \ .$$

Für alle $k \geqslant \max(M_\varepsilon, N_\varepsilon)$ gilt somit

$$s_k \in [s - \varepsilon, s + \varepsilon] \ ,$$

d.h. $s = \lim_{k\to\infty} s_k = \sum_{k=0}^{\infty} z_k$. □

BEMERKUNG 4 Es gibt Reihen die konvergent sind, aber nicht absolut konvergent, wie z.B. die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$. Die Konvergenz dieser Reihe folgt mit Hilfe des sogenannten *Konvergenzkriterium von Leibniz* , das wir nicht betrachten werden. Man kann zeigen, daß $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.

BEMERKUNG 5 Aus dem Lemma erhalten wir zentrale Konvergenzkriterien, die unabhängig von der Berechnung des Grenzwertes sind ! Dies sind also reine Existenzaussagen.

HAUPTSATZ *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ ist absolut konvergent, also auch konvergent, wenn einen der folgenden Kriterien gilt :*

(i) ***Majoranten-Kriterium*** *Es gibt eine konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit positiven Termen und $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß*

$$|z_k| \leqslant a_k \quad \textit{für alle } k \geqslant k_0 \ .$$

In diesem Fall gilt

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} z_k\right| \leqslant \sum_{l=0}^{k_0-1} |z_l| + \sum_{l=k_0}^{\infty} a_k \ .$$

(ii) ***Quotienten-Kriterium*** *Es gibt $q \in [0,1[$ und $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß*

$$\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \leqslant q \quad \textit{für alle } k \geqslant k_0 \ .$$

(iii) ***Limes-Quotienten-Kriterium*** *Die Folge $\left(\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| < 1 \ .$$

Beweis von (i). Für alle $k \geqslant k_0$ gilt

$$\sum_{l\in k}|z_l| = \sum_{l=0}^{k_0-1}|z_l| + \sum_{l=k_0}^{k-1}|z_l| \leqslant \sum_{l=0}^{k_0-1}|z_l| + \sum_{l=k_0}^{k-1}a_l \leqslant \sum_{l=0}^{k_0-1}|z_l| + \sum_{l=k_0}^{\infty}a_l$$

und die Behauptung folgt aus dem Hauptsatz 2.3 und dem Satz 2.3.ii.

Beweis von (ii). Für alle $k \geqslant k_0$ gilt

$$|z_k| \leqslant q\cdot|z_{k-1}| \leqslant q^2\cdot|z_{k-2}| \leqslant \ldots \leqslant q^{k-k_0}\cdot|z_{k_0}| = \frac{|z_{k_0}|}{q^{k_0}}\cdot q^k \ .$$

Da nach Beispiel 2.4.1 die geometrische Reihe $\frac{|z_{k_0}|}{q^{k_0}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}q^k$ konvergent ist folgt die Behauptung mit (i).

Beweis von (iii). Sei $\varepsilon > 0$, so daß $q := \lim_{k\to\infty}\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| + \varepsilon < 1$. Es gibt also $k_0 := N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \in \left[\lim_{k\to\infty}\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| - \varepsilon, \lim_{k\to\infty}\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| + \varepsilon\right] = [q-2\varepsilon, q] \quad \text{für alle } k \geqslant k_0 \ ,$$

d.h. $\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \leqslant q$ für alle $k \geqslant k_0$, und die Behauptung folgt aus (ii). □

BEISPIEL 4 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ ist konvergent. Man kann zeigen, daß $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Da für alle $k \geqslant 1$ gilt

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2}{k\cdot(k+1)}$$

(dies ist äquivalent zu $k+1 \leqslant 2k$!), schließt man mit Beispiel 2.4.2 und Hauptsatz (i). □

BEMERKUNG 6 Das Quotienten-Kriterium liefert keine Entscheidung, da

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2} = 1 \ ,$$

d.h. es gibt kein $q \in [0,1[$ mit $\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} \leqslant q$ für alle $k \geqslant k_0$ und dies unabhängig von $k_0 \in \mathbb{N}$.

BEISPIEL 5 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut konvergent. Im Kapitel 4 werden wir die Exponential- und die trigonometrischen Funktionen mit Hilfe dieser Reihe definieren.

Wir können annehmen, daß $z \neq 0$. So ist

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1!)}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k+1} \cdot |z| \right) = 0$$

und die Behauptung folgt aus dem Hauptsatz (iii). □

2.5 Cauchy-Produkt von zwei Reihen

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ zwei konvergente Reihen, so kann man mit Hauptsatz 2.2.iii nur folgendes rechnen :

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k\right) = \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{p\in k} z_p\right) \cdot \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{q\in k} w_q\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{p\in k} z_p\right) \cdot \left(\sum_{q\in k} w_q\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{(p,q)\in k\times k} z_p \cdot w_q =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{p,q=0}^{k-1} z_p \cdot w_q \ .$$

Man summiert nach dem folgenden Schemata :

$$\begin{array}{cccccc}
z_0 \cdot w_0 & z_0 \cdot w_1 & z_0 \cdot w_2 & z_0 \cdot w_3 & \ldots \\
z_1 \cdot w_0 & z_1 \cdot w_1 & z_1 \cdot w_2 & z_1 \cdot w_3 & \ldots \\
z_2 \cdot w_0 & z_2 \cdot w_1 & z_2 \cdot w_2 & z_2 \cdot w_3 & \ldots \\
z_3 \cdot w_0 & z_3 \cdot w_1 & z_3 \cdot w_2 & z_3 \cdot w_3 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Diese Resultat ist aber nicht hilfreich. Man zieht vor diagonalweise zu summieren :

$$\begin{array}{ccccc}
z_0 \cdot w_0 & z_0 \cdot w_1 & z_0 \cdot w_2 & z_0 \cdot w_3 & \ldots \\
z_1 \cdot w_0 & z_1 \cdot w_1 & z_1 \cdot w_2 & z_1 \cdot w_3 & \ldots \\
z_2 \cdot w_0 & z_2 \cdot w_1 & z_2 \cdot w_2 & z_2 \cdot w_3 & \ldots \\
\quad \iddots & \quad \iddots & \quad \iddots & &
\end{array}$$

z.B. um bei Potenzreihen die Termen gleicher Potenz zusammenfassen zu können.

Es gilt folgender

HAUPTSATZ *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ zwei* ***absolut*** *konvergente Reihen. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} z_{k-j} \cdot w_j\right)$ absolut konvergent und es gilt*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} z_{k-j} \cdot w_j\right) .$$

Es gilt

$$\sum_{l \in k} \left|\sum_{j=0}^{l} z_{l-j} \cdot w_j\right| \leqslant \sum_{l \in k} \sum_{j=0}^{l} |z_{l-j} \cdot w_j| \leqslant \sum_{(p,q) \in k \times k} |z_p| \cdot |w_q| =$$

$$= \left(\sum_{p \in k} |z_p|\right) \cdot \left(\sum_{q \in k} |w_q|\right) \leqslant \left(\sum_{p=0}^{\infty} |z_p|\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} |w_q|\right) .$$

Die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} z_{k-j} \cdot w_j\right)$ folgt somit aus Hauptsatz 2.3. Trivialerweise ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} |z_{k-j}| \cdot |w_j|\right)$ auch (absolut) konvergent.

Weiter gilt

$$\left|\left(\sum_{l \in k} z_l\right) \cdot \left(\sum_{l \in k} w_l\right) - \sum_{l \in k} \left(\sum_{j=0}^{l} z_{l-j} \cdot w_j\right)\right| \leqslant \sum_{\substack{(p,q) \in k \times k \\ p+q \geqslant k}} |z_p| \cdot |w_q| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=k}^{2k-2} \left(\sum_{j=0}^{l} |z_{l-j}| \cdot |w_j|\right) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{l} |z_{l-j}| \cdot |w_j|\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} |z_{k-j}| \cdot |w_j|\right) - \sum_{l \in k} \left(\sum_{j=0}^{l} |z_{l-j}| \cdot |w_j|\right)$$

und da $\lim_{k \to \infty} \sum_{l \in k} \left(\sum_{j=0}^{l} |z_{l-j}| \cdot |w_j|\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} |z_{k-j}| \cdot |w_j|\right)$ ist die rechte Seite eine Nullfolge, also auch die linke nach Lemma 2.3.iii. Schließlich folgt

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{l \in k} \left(\sum_{j=0}^{l} z_{l-j} \cdot w_j\right) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left[\left(\sum_{l \in k} z_l\right) \cdot \left(\sum_{l \in k} w_l\right)\right] - \lim_{k \to \infty} \left[\left(\sum_{l \in k} z_l\right) \cdot \left(\sum_{l \in k} w_l\right) - \sum_{l \in k} \left(\sum_{j=0}^{l} z_{l-j} \cdot w_j\right)\right] =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{l \in k} z_l\right) \cdot \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{l \in k} w_l\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k\right)$$

und somit die Behauptung. □

BEMERKUNG Dieser Satz ist Konsequenz des Umordnungssatzes : Ist $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ eine absolut konvergente Reihe, so kann man diese in beliebiger Odnung summieren, d.h. ist $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \sum_{j=0}^{\infty} z_{\sigma(j)} \ .$$

Er ist z.B. auf der alternierende harmonische Reihe nicht anwendbar. Man kann sogar zeigen, daß für jedes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(j)}}{\sigma(j)}$$

existiert.

2.6 Potenzreihen

DEFINITION 1 Ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, so heißt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k$ eine *Potenzreihe* und

$$R := \sup \left\{ |w| \;\middle|\; w \in \mathbb{C} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot w^k \text{ ist konvergent} \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

der *Konvergenzradius* dieser Potenzreihe.

SATZ *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k$ *eine Potenzreihe. Existiert* $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *, so ist der Konvergenzradius* R *durch*

$$R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|}$$

gegeben (hier mit $\frac{1}{0} = \infty$ *).*

Die Voraussetzung beinhalte, daß für alle k groß genug gilt $c_k \neq 0$. Sei $z \in \mathbb{C}$. Falls $0 < |z| < \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|}$, so folgt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1} \cdot z^{k+1}}{c_k \cdot z^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| \cdot |z| < 1$$

und das Limes-Quotienten-Kriterium Hauptsatz 2.4.iii zeigt, daß $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k$ konvergent ist. Damit ist

$$R \geqslant \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|} .$$

Falls $|z| > \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|}$, so folgt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1} \cdot z^{k+1}}{c_k \cdot z^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| \cdot |z| > 1$$

und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{c_{k+1} \cdot z^{k+1}}{c_k \cdot z^k}\right| \geqslant 1 \quad \text{für alle } k \geqslant N .$$

Für alle $k \geqslant N$ gilt also $\left|c_{k+1} \cdot z^{k+1}\right| \geqslant \left|c_k \cdot z^k\right|$ und durch Induktion $\left|c_k \cdot z^k\right| \geqslant \left|c_N \cdot z^N\right|$. Damit ist $\left(c_k \cdot z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ kein Nullfolge, also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k$ nicht nach Satz 2.4. Damit ist

$$R \leqslant \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|} .$$

□

Wir haben schon folgende Beispiele untersucht.

BEISPIEL 1 Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{id}^k$ (vgl. Beispiel 2.4.1) und die Exponential-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{id}^k}{k!}$ (vgl. Beispiel 2.4.5) haben Konvergenzradien 1 bzw. ∞ .

Dies folgt aus der Definition, da die erste für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| \geqslant 1$ divergiert, die zweite für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Den Satz kann man auch anwenden : es ist

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

bzw.

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 \ .$$

□

BEISPIEL 2 Sei $n \in \mathbb{Z}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^n \cdot \mathrm{id}^k$ hat Konvergenzradius 1 .

Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^n}{k^n} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^n =$$

$$= \left[\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^n = 1 \ .$$

LEMMA *Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und $\rho \in [0,1[$ ist $\left(k^n \cdot \rho^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ eine Nullfolge.*

Die Aussage folgt für $n < 0$ aus Beispiel 2.3.6, da $k^n \cdot \rho^k \leqslant \rho^k$. Es ist $\frac{1}{\rho} > 1$, also $x \in \mathbb{R}_+^*$ mit $\frac{1}{\rho} = 1 + x$. Mit Hilfe der binomischen Formel (Beispiel 1.3.3) folgt für $k \geqslant n+1$

$$\frac{1}{\rho^k} = (1+x)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot x^j \geqslant \binom{k}{n+1} \cdot x^{n+1} \ ,$$

also

$$k^n \cdot \rho^k \leqslant \frac{k^n}{\binom{k}{n+1} \cdot x^{n+1}} = \frac{k^n}{\frac{k! \cdot x^{n+1}}{(n+1)! \cdot (k-n-1)!}} = \frac{k^n}{(k-n) \cdot \ldots (k-1) \cdot k} \cdot \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{n}{k}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \cdot \frac{1}{k} \ .$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge ist, ergibt sich die Behauptung aus Lemma 2.3.iii. □

HAUPTSATZ *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k^n \cdot z^k$ absolut konvergent.

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k^n \cdot z^k$ divergent.

Insbesondere hat die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k^n \cdot \mathrm{id}^k$ auch den Konvergenzradius R .

Beweis von (i). Da $|z| < R$ existiert nach der Definition des Konvergenzradius und die Approximationseigenschaft Hauptsatz 1.5.i ein $w \in \mathbb{C}$, so daß $|z| < |w| < R$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot w^k$ konvergent ist. Nach Satz 2.4.i ist $\left(c_k \cdot w^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ eine Nullfolge. Wir wählen noch ein $\rho \in \mathbb{R}_+$ mit $|z| < \rho < |w|$ und nach dem Lemma ist $\left(k^n \cdot \left|\frac{z}{\rho}\right|^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ auch eine Nullfolge. Diese Folgen sind also nach Satz 2.3.i durch ein $M \in \mathbb{R}_+$ beschränkt. Es folgt

$$\left|c_k \cdot k^n \cdot z^k\right| = \left|c_k \cdot w^k\right| \cdot k^n \cdot \left|\frac{z}{\rho}\right|^k \cdot \left|\frac{\rho}{w}\right|^k \leqslant M^2 \cdot \left|\frac{\rho}{w}\right|^k \quad \text{mit } \left|\frac{\rho}{w}\right| < 1$$

und die Behauptung ergibt sich aus dem Majoranten-Kriterium Hauptsatz 2.4.i, da die geometrische Reihe konvergent ist (Beispiel 2.4.1).

Beweis von (ii). Wäre $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k^n \cdot z^k$ konvergent, so hätte $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k^n \cdot \mathrm{id}^k$ einen Kovergenzradius $\geqslant |z|$, also würde für $\rho \in \mathbb{R}_+$ mit $R < \rho < |z|$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k^n \cdot \rho^k$ nach (i) auch konvergent sein. Durch das Majoranten-Kriterium wäre dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \rho^k$ konvergent. Dies ist ein Widerspruch zur Definition des Konvergenzradius R von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k$. □

BEMERKUNG 1 Für $|z| = R$ sind keine allgemeine Aussagen möglich : Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{id}^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{id}^k}{k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{id}^k}{k^2}$ haben alle den Konvergenzradius 1 nach obigem Beispiel 2. Aber

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{divergiert für } z = \pm 1$$

(vgl. Beispiel 2.4.1),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \quad \text{divergiert für } z = 1 \text{ und konvergiert für } z = -1$$

(vgl. Beispiel 2.4.3 und Bemerkung 2.4.4),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad \text{konvergiert für } z = \pm 1$$

(vgl. Beispiel 2.4.4).