Kapitel 3

STETIGKEIT

UND

STANDARDFUNKTIONEN

Fassung vom 17. Juni 2005

3.1 Stetigkeit

Die Untersuchung von stetigen Funktionen (Abbildungen) in der Analysis entspricht der von linearen Abbildungen in der linearen Algebra.

DEFINITION 1 Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt *stetig* in a , wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ .$$

Sie heißt stetig auf D , wenn dies für alle $a \in D$ gilt.

BEMERKUNG Nach Definition 2.1.2 ist f genau dann stetig in a , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß

$$\text{für alle } x \in D \text{ aus } |x - a| \leqslant \delta \text{ folgt } |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon \ ,$$

d.h. "kleine" Änderungen des Arguments bewirken "kleine" Änderungen des Funktionswertes.

Nach Hauptsatz 2.2 gilt

HAUPTSATZ *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$.*

(i) Sind f, g stetig in a , so sind

$$\alpha \cdot f \quad , \quad f + g \quad , \quad f \cdot g$$

und

$$\frac{f}{g} \quad , \quad \textit{falls } g(x) \neq 0 \textit{ für alle } x \in D \ ,$$

stetige Funktionen in a .

(ii) Ist $C \subset \mathbb{R}$, $c \in C$ und $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in c , so daß $h(C) \subset D$ und $h(c) = a$, so ist $f \circ h$ stetig in c .

(iii) Global formuliert : Summen, Produkten, Quotienten, Verkettungen und Einchränkungen von stetigen Funktionen sind stetig.

Beweis von (i) Z.B. schreibt man

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} \Big[f(x) + g(x) \Big] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) =$$

$$= f(a) + g(a) = (f+g)(a) \ .$$

Beweis von (ii) Es ist

$$\lim_{u\to c} f\circ h(u) = \lim_{u\to c} f(h(u)) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f(h(c)) = f\circ h(c) \ ,$$

mit der Variablenänderung $x = h(u)$, da $\lim_{u\to c} h(u) = h(c) = a$ gilt. $\square$

DEFINITION 2 Seien $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Man schreibt

$$\lim_{x\to a-} f(x) := \lim_{a>x\to a} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a+} f(x) := \lim_{a<x\to a} f(x)$$

und nennt diese *linksseitigen Grenzwert* bzw. *rechtsseitigen Grenzwert* .

Z.B. ist

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty \ .$$

SATZ (Kriterien für Stetigkeit) *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ und $a \in D$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent :*

(i) *f ist stetig in a .*

(ii) *Es gilt*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+} f(x) \ .$$

(iii) *f ist in a **folgenstetig** , d.h. für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a) \ .$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ist V eine Umgebung von $f(a)$, so existiert nach (i) eine Umgebung U von a mit $f(D\cap U) \subset V$. Es gilt also trivialerweise

$$f(D\cap \left]-\infty, a\right[\cap U) \subset V \quad \text{und} \quad f(D\cap \left]a,\infty\right[\cap U) \subset V$$

und somit (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zu $\varepsilon > 0$ existieren nach (ii) Umgebungen $U_\pm$ von a mit

$$f(D\cap \left]-\infty, a\right[\cap U_-) \subset U_\varepsilon(f(a)) \quad \text{und} \quad f(D\cap \left]a,\infty\right[\cap U_+) \subset U_\varepsilon(f(a)) \ .$$

Da $U := U_- \cap U_+$ auch eine Umgebung von a ist (Beispiel 2.1.2) und $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant N_\varepsilon$ gilt

$$x_k \in U = \Big[D\cap \left]-\infty, a\right[\cap U\Big] \cup \{a\} \cup \Big[D\cap \left]a,\infty\right[\cap U\Big] \ ,$$

also $f(x_k) \in U_\varepsilon(f(a))$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Wir beweisen die Kontraposition $\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$: Ist f in a unstetig, so existiert ein $\varepsilon > 0$ ohne passendes $\delta > 0$, d.h. für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$f\left(D\cap U_{\frac{1}{k}}(a)\right) \not\subset U_\varepsilon(f(a)) \ ,$$

und somit gibt es ein $x_k \in D$ mit $|x_k - a| \leqslant \frac{1}{k}$ und $|f(x_k) - f(a)| > \varepsilon$. Daraus folgt aber $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ und $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(a)$, d.h. $\neg(iii)$. $\square$

BEISPIEL 1 Jedes Polynom

$$p = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot \mathrm{id}^j : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^j$$

ist auf jeder Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ stetig.

Nach den Beispielen 1 und 2 aus 2.2 sind die konstanten und die identischen Funktionen stetig. Die Behauptung folgt somit aus dem Hauptsatz. □

BEISPIEL 2 Die Funktion $1_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in 0 unstetig.

Dies folgt aus Satz (ii), da trivialerweise gilt

$$\lim_{x \to 0-} 1_{\mathbb{R}_+}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0+} 1_{\mathbb{R}_+}(x) = 1 \ ,$$

sowohl auch aus (iii) mit Hilfe der Folge $\left(\frac{(-1)^k}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$, die gegen 0 konvergiert, aber

$$1_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{(-1)^k}{k}\right) = \begin{cases} 1 & \\ & \text{falls} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} k \text{ gerade} \\ \\ k \text{ ungerade} \end{matrix}$$

divergiert. □

BEISPIEL 3 Die Betragsfunktion $|\mathrm{id}| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Konvergiert $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert $(|x_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $|a|$ mit Hilfe des Lemmas 2.3, da nach der Vierecksungleichung (Satz 1.4) gilt

$$\Big| |x_k| - |a| \Big| \leqslant |x_k - a| \ .$$

□

BEISPIEL 4 Sind $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so sind $|f|$, $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ stetige Funktionen.

Als Verkettung $|f| = |\mathrm{id}| \circ f$ ist diese Funktion stetig. Da

$$\max(f, g) = \frac{1}{2} \cdot \Big(f + g + |f - g| \Big)$$

und

$$\min(f, g) = \frac{1}{2} \cdot \Big(f + g - |f - g| \Big)$$

(Bemerkung 1.7.2) sind diese Funktionen auch stetig. □

3.2 Stetige Funktionen auf einem Intervall

SATZ (Zwischenwertsatz) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*

(i) Ist $a, b \in J$, $a < b$ und γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \gamma$.

(ii) $f(J)$ ist ein Intervall.

Beweis von (i) Ohne Eischränkung kann mann $f(a) < \gamma < f(b)$ annehmen. Durch Induktion und Intervallhalbierung konstruiert man

$$[a_k, b_k] \subset [a, b]$$

mit

$$[a_0 b_0] := [a, b] \quad , \quad b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \quad \text{und} \quad f(a_k) < \gamma \leqslant f(b_k) \ . \tag{$*$}$$

Es genügt beim Induktionsschritt

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := \begin{cases} \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right] & \text{falls} \quad f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \geqslant \gamma \\ \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right] & \phantom{\text{falls}} \quad f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) < \gamma \end{cases}$$

zu wählen. Die Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind monoton wachsend bzw. fallend und beschränkt, also nach Hauptsatz 2.3 konvergent. Es folgt

$$\lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} = 0$$

und wir definieren

$$\xi := \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k \ .$$

Da f stetig ist folgt aus $(*)$

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \leqslant \gamma \quad \text{und} \quad f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(b_k) \geqslant \gamma$$

mit Hilfe des Satzes 2.3.ii, d.h. $f(\xi) = \gamma$.

Beweis von (ii) Nach (i) enthält $f(J)$ mit je zwei Punkten auch alle Zwischenpunkte, ist also nach Definition 1.4.2 ein Intervall. □

BEMERKUNG Der Beweis aus (i) ist konstruktiv, liefert somit ein Berechnungsverfahren.

BEISPIEL 1 Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geqslant 2$. Die Funktion

$$\mathrm{id}^p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

ist streng monoton wachsend, da aus $0 \leqslant x < y$ folgt durch Induktion

$$x^p = x \cdot x^{p-1} \leqslant y \cdot x^{p-1} < y \cdot y^{p-1} = y^p \ .$$

Sie ist stetig nach Hauptsatz 3.1.i, also ist $\mathrm{id}^p(\mathbb{R}_+)$ ein Intervall in $\mathbb{R}_+$. Da aber $\lim_{x\to\infty} x^p = (\lim_{x\to\infty} x)^p = \infty$, ist $\mathrm{id}^p(\mathbb{R}_+)$ nach oben unbeschränkt, also ist $\mathrm{id}^p(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ und somit id^p bijektiv. Die Umkehrfunktion ist die p-te Wurzelfunktion

$$\sqrt[p]{\mathrm{id}} := \overset{-1}{\mathrm{id}^p} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ .$$

Dies ist die dritte und natürliche Methode zur Definition dieser Funktion.

Ist $\sqrt[p]{\mathrm{id}}$ stetig ? Dazu

HAUPTSATZ (über die Umkehrfunktion) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig streng monoton wachsende bzw. fallende Funktion. Dann ist $f(J)$ ein Intervall mit Endpunkten*

$$\lim_{x\to \inf J+} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to \sup J-} f(x) \ ,$$

und die Umkehrfunktion

$$\overset{-1}{f} : f(J) \longrightarrow J \subset \mathbb{R}$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend bzw. fallend.

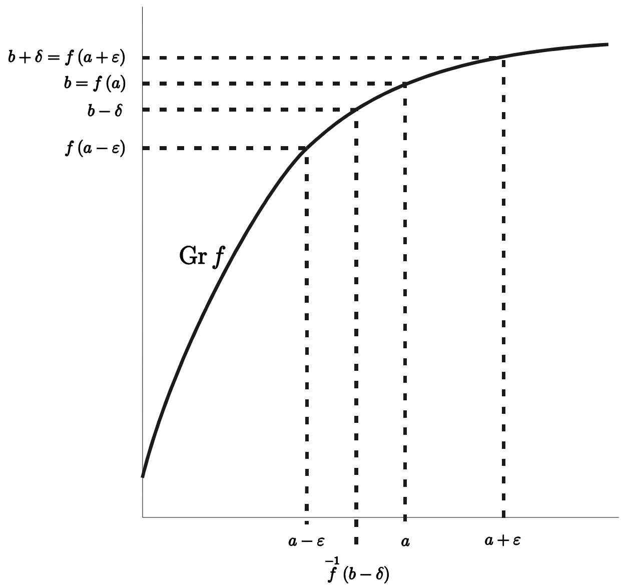
Sei f streng monoton wachsend. Um zu zeigen, daß $\overset{-1}{f}$ auch streng monoton wachsend ist, seien $u, v \in f(J)$. Es gibt eindeutig bestimmte $x, y \in J$, so daß $u = f(x)$ und $v = f(y)$. Da

$$x \geqslant y \quad \Longrightarrow \quad u = f(x) \geqslant f(y) = v \ ,$$

durch Kontraposition bekommt man

$$u < v \quad \Longrightarrow \quad \overset{-1}{f}(u) = x < y = \overset{-1}{f}(v) \ .$$

Um die Stetigkeit von $\overset{-1}{f}$ in $b = f(a)$ zu zeigen, sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Das folgende Bild verdeutlicht den Sachverhalt.



Da $f(a-\varepsilon) < f(a) = u < f(a+\varepsilon)$, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$f(a-\varepsilon) \leqslant b-\delta < f(a) = b < b+\delta \leqslant f(a+\varepsilon)$$

und somit gilt

$$\overset{-1}{f}([b-\delta, b+\delta]) \subset \overset{-1}{f}([f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon)]) = [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \ ,$$

was zu beweisen war. □

BEISPIEL 2 Die p-te Wurzelfunktion ist stetig und streng monoton wachsend.

BEISPIEL 3 Die Funktion

$$\mathrm{id}^5 + \mathrm{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist stetig, streng monoton wachsend und surjektiv, da

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^5+x\right) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(x^5+x\right) = -\infty \ .$$

Ihre Umkehrfunktion ist also auch stetig und streng monoton wachsend. Sie kann nicht mit Hilfe von elementaren Funktionen ausgedrückt werden. Z.B. kann man nachweisen, daß gilt

$$\left(\mathrm{id}^5 \overset{-1}{+} \mathrm{id}\right)(2) = 1$$

und die einzige reelle Lösung $\left(\mathrm{id}^5 \overset{-1}{+} \mathrm{id}\right)(1)$ von $\left(x^2-x+1\right)\left(x^3+x^2-1\right) = x^5+x-1 = 0$ ist die einzige reelle Lösung von $x^3+x^2-1 = 0$, da $\mathrm{id}^2 - \mathrm{id} + 1 > 0$ überall ($c - \frac{b^2}{4a} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$). Nach der Cardano-Formel bekommt man

$$\left(\mathrm{id}^5 \overset{-1}{+} \mathrm{id}\right)(1) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{100+12\sqrt{69}} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{100+12\sqrt{69}}} - \frac{1}{3} \ .$$

Aber die einzige reelle Lösung $\left(\mathrm{id}^5 \overset{-1}{+} \mathrm{id}\right)(3)$ von $x^5+x-3 = 0$ kann man explizit berechnen. Mit Hilfe des Newton-Verfahrens (siehe §4.6) bekommt man

$$\left(\mathrm{id}^5 \overset{-1}{+} \mathrm{id}\right)(3) = 1.132\,997\,565\,885\,065\,266\,721\,141\,634\,288\,532\,379\,816\,526\,027\,727 \ .$$

Der dritte wichtige Satz ist

HAUPTSATZ (Annahme von Maximum und Minimum) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

(i) *f ist beschränkt.*

(ii) *Es existieren $\xi, \eta \in [a,b]$ mit*

$$f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant f(\eta) \quad \textit{für alle } x \in [a,b] \ .$$

Beweis von (i). Wir zeigen zuerst, daß f nach oben beschränkt ist. Ist dies nicht der Fall, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$M_k := \{x \in [a,b] \mid f(x) \geqslant k\} \subset [a,b]$$

nicht leer, also existiert nach dem Satz von Dedekind (Hauptsatz 1.5.ii) $\sup M_k \in [a,b]$. Da $M_{k+1} \subset M_k$, gilt $a \leqslant \sup M_{k+1} \leqslant \sup M_k$ und somit ist die monoton fallende Folge $(\sup M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ (Satz 2.3.ii) konvergent (Hauptsatz 2.3). Da f stetig ist bekommt man

$$\infty > f(\lim_{k\to\infty} \sup M_k) = \lim_{k\to\infty} f(\sup M_k) \geqslant \lim_{k\to\infty} k = \infty \ ,$$

ein Widerspruch. Analog beweist man, daß f nach unten beschränkt ist.

Beweis von (ii). Mit (i) und dem Satz von Dedekind existiert $s := \sup f([a,b])$. Ist $f(x) < s$ für alle $x \in [a,b]$, so ist nach Hauptsatz 3.1.i die Funktion

$$\frac{1}{s-f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{s-f(x)}$$

stetig. Nach (i) ist sie beschränkt, d.h. es gibt $M \in \mathbb{R}_+$ mit $\frac{1}{s-f(x)} \leqslant M$ für alle $x \in [a,b]$, d.h. $f(x) \leqslant s - \frac{1}{M}$, ein Widerspruch zur Approximationseigenschaft (Hauptsatz 1.5.i). Dies zeigt, daß ein $\eta \in [a,b]$ existiert mit $f(\eta) = s \geqslant f(x)$ für alle $x \in [a,b]$, also nimmt f ihr Maximum an. Analog beweist man, daß f ihr Minimum annimmt. □

BEMERKUNG 1 Wir haben sehr viel benutzt : die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, die Stetigkeit von f , die Beschränktheit und die Abgeschlossenheit von $[a,b]$.

BEMERKUNG 2 Mit Hilfe der Differentialrechnung (siehe § 4.3) kann man diese Stellen in vielen Situationen bestimmen.

BEMERKUNG 3 Einen anderen Beweis mit Intervallhalbierung : Es gilt

$$\sup f([a,b]) = \max\left(\sup f\left(\left[a, \frac{a+b}{2}\right]\right), f\left(\left[\frac{a+b}{2}, b\right]\right)\right) \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

Durch Induktion bekommt man eine fallende Folge $([a_k,b_k])_{k\in\mathbb{N}^*}$, so daß

$$\sup f([a,b]) = \sup f([a_k,b_k]) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}^* \ .$$

Nach der Approximationseigenschaft (Hauptsatz 1.5.i) existiert $x_k \in [a_k,b_k]$ mit

$$f(x_k) > \begin{cases} \sup f([a,b]) - \frac{1}{k} & \text{falls} \quad \sup f([a,b]) \in \mathbb{R} \\ k & \phantom{\text{falls}} \quad \sup f([a,b]) = \infty \end{cases} \ .$$

Wie beim Beweis des Zwischenwertsatzes existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\lim_{k\to\infty} a_k = \xi = \lim_{k\to\infty} b_k$. Da $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt auch $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$ und es folgt

$$\sup f([a,b]) \geqslant f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) \geqslant \sup f([a,b]) \ ,$$

d.h. $\sup f([a,b]) = f(\xi) \in \mathbb{R}$. □

BEISPIEL 4 Ein Polynom

$$p = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \mathrm{id}^k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grade $n := \operatorname{grad} p$, d.h. $c_n \neq 0$, ist stetig nach Hauptsatz 3.1.i und

(a)

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = c_n \cdot (\pm 1)^n \cdot \infty \ .$$

(b) Ist n ungerade, so ist $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, insbesondere besitzt jedes Polynom mit ungeradem Grads eine reelle Nullstelle.

(c) Ist n gerade und $c_n > 0$, so existiert $\min p(\mathbb{R})$, d.h. $p(\mathbb{R}) = [\min p(\mathbb{R}), \infty[$.

Beweis von (a) Es gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^n \cdot \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \mathrm{id}^{k-n} \right) = \left(\lim_{x\to\pm\infty} x^n\right) \cdot \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{id}^{k-n} =$$

$$= c_n \cdot (\pm 1)^n \cdot \infty \ .$$

Beweis von (b) Ist $c_n > 0$, so ist $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$, also $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ nach dem Zwischenwertsatz, also wird jeder Wert, insbesondere 0 , angenommen.

Beweis von (c) Da $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \infty$, existiert $R \in \mathbb{R}_+$ mit $p(x) \geqslant p(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geqslant R$. Nach obigem Hauptsatz nimmt die stetige Funktion $p_{|[-R,R]}$ ihr Minimum in ξ an und es gilt

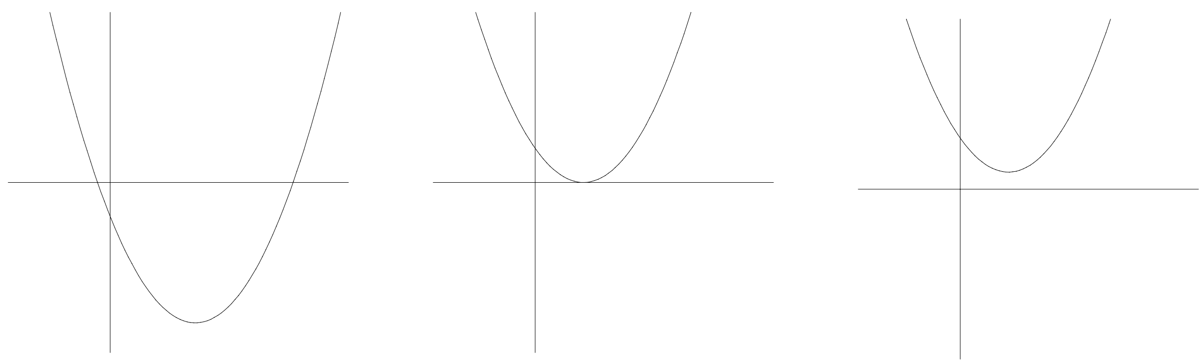
$$p(\xi) = \min p([-R,R]) \leqslant p(0) \leqslant p(x) \quad \text{falls } |x| \geqslant R \ ,$$

d.h.

$$p(\xi) = \min p(\mathbb{R}) \ .$$

Die Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz. $\square$

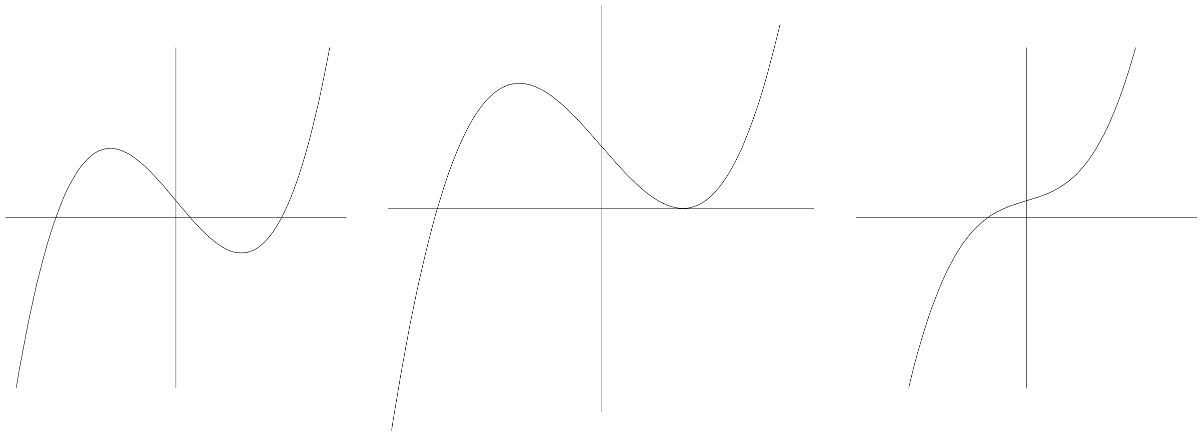
Ist $p = a \cdot \mathrm{id}^2 + b \cdot \mathrm{id} + c$ mit $a > 0$,



$b^2 - 4ac > 0$ $\qquad$ $b^2 - 4ac = 0$ $\qquad$ $b^2 - 4ac < 0$

so gibt es bzw. zwei, eine doppelte und keine Nullstelle.

Ist $\operatorname{grad} p = 3$,



so gibt es maximal drei Nullstellen bzw. drei, zwei mit einer doppelten und eine Nullstelle.

3.3 Stetige Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{C}$

Genau so wie in $\mathbb{R}$ definiert man Umgebungen und Grenzwerte in $\mathbb{C}$ (vgl. 2.1, Definitionen 1 und 2).

DEFINITION 1 Für $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$U_\varepsilon(w) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - w| \leqslant \varepsilon\} \ .$$

Eine Menge $V \subset \mathbb{C}$ heißt *Umgebung* von w , falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $V \supset U_\varepsilon(w)$.

Sind $D \subset \mathbb{C}$, $w \in D$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma \in \mathbb{C}$, so heißt γ *Grenzwerte* von f für z gegen w und man schreibt $\lim_{z \to w} f(z) = \gamma$, falls für jede Umgebung V von γ eine Umgebung U von w existiert mit

$$f(D \cap U) \subset V \ .$$

BEMERKUNG 1 Analog zur Definition 2.3.3 der Konvergenz von reellen Folgen kann man die Konvergenz einer Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gegen $\lim_{k\to\infty} z_k$ definieren : Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|z_k - \lim_{k\to\infty} z_k| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geqslant N_\varepsilon \ .$$

Diese stimmt nach Lemma 2.3.ii mit der in Definition 2.3.3, die mit Hilfe des reellen und imaginären Teil formuliert wurde.

Die Stetigkeit von Funktionen wird wie in 3.1 definiert.

DEFINITION 2 Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt in w stetig, falls

$$\lim_{z \to w} f(z) = f(a) \ .$$

BEMERKUNG 2 Wie in 3.1 gelten entspechend folgende Resultate :

Die Bemerkung über die ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit,
der Hauptsatz über die Stabilitätseigenschaften von stetigen Funktionen

und

der Satz "Kriterien für Stetigkeit".

BEISPIEL 1 Die folgenden Funktionen

$$c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C} \ ,$$

$$\mathrm{id} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto z \ ,$$

$$\overline{\mathrm{id}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \overline{z} \ ,$$

$$\mathrm{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto \mathrm{Re}\, z \ ,$$

$$\mathrm{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto \mathrm{Im}\, z$$

und

$$|\mathrm{id}| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : z \longmapsto |z|$$

sind stetig.

Für die ersten zwei ist es einfach. Für die letzten drei folgt es z.B. für $w \in \mathbb{C}$ aus den Ungleichungen

$$|\overline{z} - \overline{w}| \ , \ |\mathrm{Re}\, z - \mathrm{Re}\, w| \ , \ |\mathrm{Im}\, z - \mathrm{Im}\, w| \ , \ \Big| |z| - |w| \Big| \leqslant |z - w|$$

und die ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit. $\square$

BEMERKUNG 3 Die Stetigkeit von Re und Im bedeutet für eine konvergente Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, daß

$$\mathrm{Re}\,(\lim_{k\to\infty} z_k) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Re}\, z_k \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\,(\lim_{k\to\infty} z_k) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Im}\, z_k \ ;$$

dies ist die Definition 2.3.3 der Konvergenz von $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$! Man beachte die obige Bemerkung 1 !

Ist insbesondere $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ eine konvergente Reihe, so gilt

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_k \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_k \ .$$

BEISPIEL 2 Polynome

$$p = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \mathrm{id}^k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot z^k$$

und allgemeiner rationale Funktionen

$$\frac{p}{q} : \{q \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \frac{p\,(z)}{q\,(z)} \ ,$$

wobei p und q Polynome sind, sind stetig.

Als nächstes Beispiel untersuchen wir Funktionen, die mit Potenzreihen definiert sind. Sei

$$D_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$

die *offene Kreisscheiben* in $\mathbb{C}$ mit Radius R und Zentrum 0 .

SATZ

(i) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ und Konvergenzradius R , so ist die Funktion

$$f : D_R \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k$$

Claude Portenier
Wolfgang Gromes

stetig.

(ii) ***Identitätssatz für Potenzreihen*** *Stimmen zwei Potenzreihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k \quad \textit{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot \mathrm{id}^k$$

auf einer gegen 0 *konvergente Folge* $(z_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^*$ *überein, so gilt* $c_k = d_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *.*

Beweis von (i). Für jedes $w \in D_R$ existiert $\rho \in \mathbb{R}_+$ mit $|w| < \rho < R$ und für jedes $z \in U_{\rho-|a|}(a) \subset D_R$ gilt

$$z^k - w^k = (z - w) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} \cdot w^j$$

durch Ausmultiplizieren, also

$$\left|z^k - w^k\right| = |z - w| \cdot \sum_{j=0}^{k} |z|^{k-j} \cdot |w|^j \leqslant k \cdot \rho^k \cdot |z - w|$$

und somit

$$|f(z) - f(w)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot w^k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot \left|z^k - w^k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot k \cdot \rho^k\right) \cdot |z - w| \ .$$

Nach Hauptsatz 2.6.i ist $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot k \cdot \rho^k$ konvergent, also konvergiert die rechte Seite gegen 0 und somit $f(z)$ gegen $f(w)$ falls z gegen w konvergiert, was zu beweisen war.

Beweis von (ii). Durch Substraktion sei ohne Einschränkung $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z_l^k = 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und k_0 das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $c_k \neq 0$. Da

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k = z^{k_0} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} c_{k_0+j} \cdot z^j$$

und $f : z \longmapsto \sum_{j=0}^{\infty} c_{k_0+j} \cdot z^j$ nach (i) stetig mit $f(0) = c_{k_0} \neq 0$ ist, existiert $\delta > 0$, so daß $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U_\delta(0)$. Daraus folgt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k \neq 0$ für alle $z \in U_\varepsilon(0) \smallsetminus \{0\}$. Dies ist ein Widerspruch, da ein $l \in \mathbb{N}$ mit $z_l \in U_\varepsilon(0) \smallsetminus \{0\}$ existiert. □

3.4 Die Exponentialfunktion

Nach Beispiel 2.6.1 wissen wir, daß der Konvergenzradius der Exponentialreihe ∞ ist.

DEFINITION Die Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

heißt die *Exponentialfunktion* (oder *e-Funktion*).

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

heißt die *Eulersche Zahl* .

Sie ist die wichtigste Funktion der Mathematik und der Naturwissenschaften. Ihre wichtigste Eigenschaft ist

HAUPTSATZ (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) *Die Exponentialfunktion ist stetig und für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad .$$

Die Stetigkeit von exp folgt aus dem Satz 3.3.i., und da die Exponentialreihe absolut konvergent ist (vgl. Beispiel 2.6.1 und Hauptsatz 2.6), gilt nach dem Cauchy-Produktsatz 2.5 und der binomischen Formel (Beispiel 1.3.3) :

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{z^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{w^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot z^{k-j} \cdot w^j \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \exp(z+w) \quad ,$$

da $\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)! \cdot j!}$. $\square$

Die weiteren Eigenschaften folgen im Wesentlichen aus der Funktionalgleichung :

KOROLLAR *Die reelle Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ist eine stetige, bijektive, streng monoton wachsende Funktion.

Präziser gilt

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

sowie

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \textit{und} \quad \exp(q \cdot x) = \exp(x)^q \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R} \textit{ und } q \in \mathbb{Q} \ .$$

Diese Funktion ist stetig nach dem Satz. Es gilt

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$, und aus der Funktionalgleichung folgt

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \ ,$$

d.h. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$; insbesondere ergibt sich $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ bekommt man

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x) \cdot \Big(\exp(y) \cdot \exp(-x) - 1\Big) = \exp(x) \cdot \Big(\exp(y - x) - 1\Big) > 0 \ ,$$

d.h. exp ist streng monoton wachsend und somit injektiv.

Für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geqslant x \ ,$$

also folgt $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, und durch die Variablenänderung $y = -x$ auch

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{y\to\infty} \exp(-y) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{\infty} = 0 \ ;$$

insbesondere ist das Intervall $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, d.h. exp ist bijektiv.

Schließlich liefert für $m \in \mathbb{N}$ wiederum die Funktionalgleichung

$$\exp(m \cdot x) = \exp\underbrace{(x + \ldots + x)}_{m\text{-mal}} = \underbrace{\exp(x) \cdot \ldots \cdot \exp(x)}_{m\text{-mal}} = \exp(x)^m \ ,$$

also

$$\exp(-m \cdot x) = \frac{1}{\exp(m \cdot x)} = \frac{1}{\exp(x)^m} = \exp(x)^{-m} \ ;$$

für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ erhält man

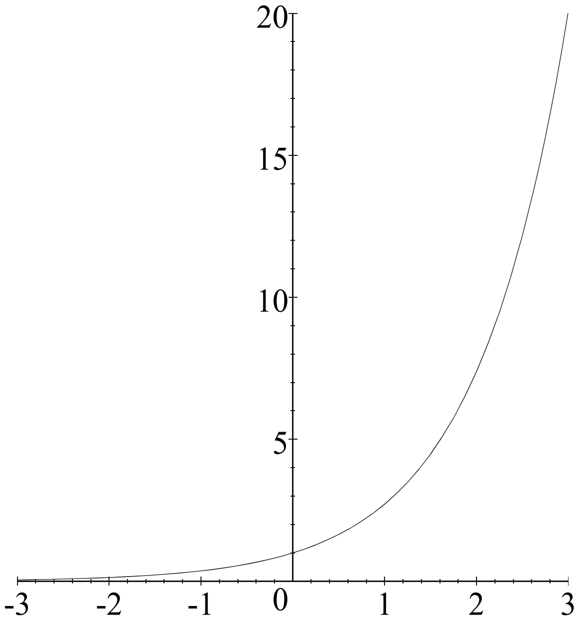
$$\exp\left(\frac{m}{n} \cdot x\right)^n = \exp(m \cdot x) = \exp(x)^m \ ,$$

d.h. $\exp\left(\frac{m}{n} \cdot x\right) = \sqrt[n]{\exp(x)^m} = \exp(x)^{\frac{m}{n}}$. □

BEMERKUNG 1 Dem raschen Anwachsen von $\exp(x)$ für große x entspricht wegen

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

die schnelle Annäherung an 0 für kleine, d.h. betragsmäßig große und negative x .



Exponentialfunktion

x	-3	-1	0	1	3	10
e^x	0.049	0.36	1	2.71	20.08	$2.20 \cdot 10^4$

x	22	29	63
$\exp(x)$	$3.58 \cdot 10^9$	$3.93 \cdot 10^{12}$	$2.29 \cdot 10^{27}$
$\exp(x) \cdot 10\,\mathrm{cm}$	fast zum Mond	weiter als die Sonne	doppelten Durchmesser des Universums

Nimmt man $10\,\mathrm{cm}$ als Einheit, so entspricht $\exp(22)$ ungefähr $3.58 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$. Die Distanz Erde-Mond ist $3.65 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ bzw. $4.07 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$, die Distanz Erde-Sonne $1.47 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ bzw. $1.52 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Das Durchmesser des Universums, der ungefähr 10^{10} Lichtjahre beträgt, 1 Lichtjahr ist $9.46 \cdot 10^{12}\,\mathrm{km} \simeq 10^{16}\,\mathrm{m}$, ist also ungefähr $10^{26}\,\mathrm{m}$.

3.5 Der Logarithmus und allgemeine Potenzen

Da nach Korollar 3.3

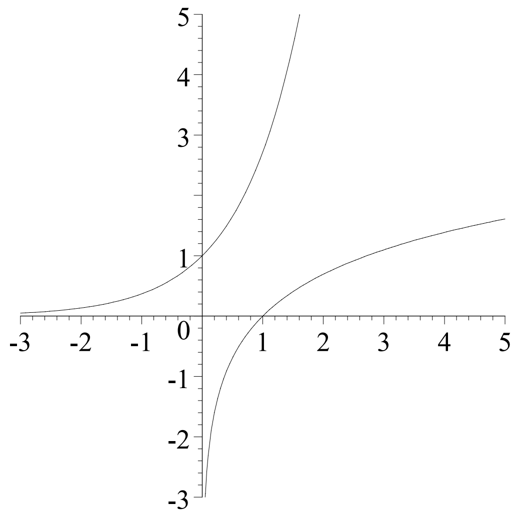
$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto e^x$$

eine stetige bijektive streng monoton wachsende Funktion ist, erlaubt der Hauptsatz über die Umkehrfunktion 3.2 folgende

DEFINITION 1 Die Funktion

$$\ln := \overset{-1}{\exp} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \ln y$$

heißt der *(natürliche) Logarithmus* .



$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

SATZ *Der Logarithmus* ln *ist eine stetige bijektive streng monoton wachsende Funktion mit*

$$\lim_{y\to\infty} \ln y = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{y\to 0+} \ln y = -\infty \ .$$

Es erfüllt die folgende ***Funktionalgleichung*** *: Für alle* $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ *gilt*

$$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v \ .$$

Die ersten Aussagen folgen aus dem Korollar 3.3 und die Äquivalenz

$$y = \exp(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \ln y = x \ .$$

Für die Funktionalgleichung genügt es zu bemerken, daß

$$\exp(\ln u + \ln v) = \exp(\ln u) \cdot \exp(\ln v) = u \cdot v \ ,$$

woraus folgt

$$\ln u + \ln v = \ln\Big(\exp(\ln u + \ln v)\Big) = \ln(u \cdot v) \ .$$

$\square$

BEMERKUNG 1 Da exp sehr schnell wächst, wächst ln sehr langsam. Es ist $\ln 1 = \ln(\exp(0)) = 0$ und

$$\ln\left(2.20 \cdot 10^4\right) \simeq \ln(\exp(10)) = 10 \quad , \quad \ln\left(2.29 \cdot 10^{27}\right) \simeq \ln(\exp(63)) = 63 \ .$$

BEMERKUNG 2 Nach Korollar 3.4 gilt für $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $q \in \mathbb{Q}$

$$a^q = (\exp(\ln a))^q = \exp(q \cdot \ln a) \ .$$

Da für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Folge $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ mit $x = \lim_{k\to\infty} q_k$ existiert und exp stetig ist, folgt

$$\exp(x \cdot \ln a) = \exp(\lim_{k\to\infty} q_k \cdot \ln a) = \lim_{k\to\infty} \exp(q_k \cdot \ln a) = \lim_{k\to\infty} a^{q_k} \ .$$

Deshalb folgende

DEFINITION 2 Für alle $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \ .$$

Insbesondere ist

$$e^x = \exp(x)$$

und man nennt die Funktion

$$a^{\mathrm{id}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

die *Exponentialfunktion zur Basis* a .

BEMERKUNG 3 Für jedes $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geqslant 2$ gilt

$$\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\frac{1}{p} \cdot \ln a\right) \ ,$$

die vierte Möglichkeit $\sqrt[p]{\mathrm{id}}$ zu definieren !

BEMERKUNG 4 Die Exponentialfunktion a^{id} zur Basis $a \in \mathbb{R}_+^*$ erfüllt die gleiche Funktionalgleichung wie exp : Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

und sie ist stetige bijektive, streng monoton, falls $a \neq 1$, wachsend, falls $a > 1$, fallend, falls $a < 1$.

In der Tat $a^{x+y} = e^{(x+y)\cdot\ln a} = e^{x\cdot\ln a + y\cdot\ln a} = e^{x\cdot\ln a} \cdot e^{y\cdot\ln a} = a^x \cdot a^y$. Für die Monotonie beachtet man, daß $\ln a > 0$, falls $a > 1$ und $\ln a < 0$, falls $a < 1$. $\square$

DEFINITION 3 Die *Logarithmusfunktion zur Basis* $a \in \mathbb{R}_+^*$ ist definiert durch

$$\log_a := \overset{-1}{a^{\mathrm{id}}} \ .$$

Man schreibt üblicherweise

$$\log := \log_{10} \ ,$$

die *Logarithmusfunktion zur Basis* 10 . Für Informatiker (Komplexitätstheorie) ist auch $\log_2$ von Bedeutung.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}_+^*$ ist $\log_a y = x$ äquivalent zu

$$y = a^x = e^{x \cdot \ln a} \ ,$$

also zu $\ln y = \ln\left(e^{x \cdot \ln a}\right) = x \cdot \ln a$, d.h.

$$\log_a y = x = \frac{\ln y}{\ln a} \ .$$

Früher waren die Logarithmen Grundlage für numerisches Rechnen : Logarithmentafeln und Rechenstäbe.

3.6 Die trigonometrischen Funktionen

DEFINITION 1 Sei

$$\mathbb{U} := \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\}$$

die Kreislinie in $\mathbb{C}$.

LEMMA *Es gilt*

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \textit{und} \quad e^{i \cdot t} \in \mathbb{U} \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R} \ ,$$

sowie

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{i \cdot t} - 1}{t} = i \ .$$

Mit Hilfe des Beispiels 3.3.1 folgt

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!} = e^{\overline{z}}$$

und somit

$$\left|e^{i \cdot t}\right|^2 = \overline{e^{i \cdot t}} \cdot e^{i \cdot t} = e^{-i \cdot t} \cdot e^{i \cdot t} = e^{-i \cdot t + i \cdot t} = e^0 = 1 \ ,$$

d.h. $\left|e^{i \cdot t}\right| = 1$.

Für alle $t \in [0, 1]$ bekommt man

$$\left|e^{i \cdot t} - 1 - i \cdot t\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(i \cdot t)^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = t^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+2)!} \leqslant t^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \cdot t^2 \ ,$$

also

$$\left|\frac{e^{i \cdot t} - 1}{t} - i\right| \leqslant e \cdot t$$

und somit $\lim_{t \to 0} \frac{e^{i \cdot t} - 1}{t} = i$. □

DEFINITION 2 Eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *parametrisierte Kurve* in $\mathbb{C}$. Sie heißt *rektifizierbar* , falls der Grenzwert

$$L(\gamma) := \lim_{(t_j)_{j=0,\ldots,n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|$$

existiert, wobei $(t_j)_{j=0,\ldots,n}$ die Unterteilung $(t_j)_{j=0,\ldots,n}$ von $[a, b]$, d.h.

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b \ ,$$

durchläuft, deren Feinheit $\max_{j=0,\ldots,n-1} |t_{j+1} - t_j|$ gegen 0 strebt. $L(\gamma)$ heißt dann die *Bogenlänge* von γ .

HAUPTSATZ *Für alle $b \in \mathbb{R}_+$ ist die Bogenlänge von*

$$\gamma : [0, b] \longrightarrow \mathbb{U} : t \longmapsto e^{i \cdot t}$$

gleich b .

Wir beweisen nicht die Rektifizierbarkeit von γ , da der obige Grenzwertbegriff nicht explizit definiert ist. Für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ betrachten wir die gleichmäßige Unterteilung $\left(j \cdot \frac{b}{k}\right)_{j=0,\ldots,k}$ von $[0, b]$ und berechnen lediglich den folgenden Grenzwert mit Hilfe des Lemmas :

$$L(\gamma) := \lim_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left|\gamma\left((j+1) \cdot \frac{b}{k}\right) - \gamma\left(j \cdot \frac{b}{k}\right)\right| = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left|e^{i \cdot (j+1) \cdot \frac{b}{k}} - e^{i \cdot j \cdot \frac{b}{k}}\right| =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left|e^{i \cdot j \cdot \frac{b}{k}}\right| \left|e^{i \cdot \frac{b}{k}} - 1\right| = \lim_{k \to \infty} k \cdot \left|e^{i \cdot \frac{b}{k}} - 1\right| = b \cdot \lim_{k \to \infty} \left|\frac{e^{i \cdot \frac{b}{k}} - 1}{\frac{b}{k}}\right| =$$

$$= b \cdot \left|\lim_{k \to \infty} \frac{e^{i \cdot \frac{b}{k}} - 1}{\frac{b}{k}}\right| = b \cdot |i| = b \ ,$$

da $\lim_{k \to \infty} \frac{b}{k} = 0$. □

DEFINITION 3 Es sei

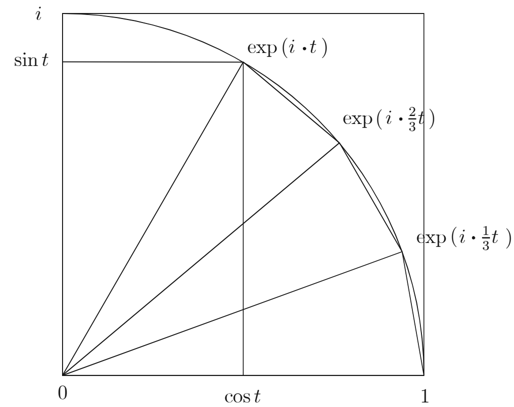
$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \operatorname{Re}\left(e^{i \cdot t}\right) \qquad \text{(Cosinus-Funktion)}$$

und

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \operatorname{Im}\left(e^{i \cdot t}\right) \ , \qquad \text{(Sinus-Funktion)}$$

d.h.

$$e^{i \cdot t} = \cos t + i \cdot \sin t \qquad \text{(Eulersche Formel)}$$



BEMERKUNG Obiger Hauptsatz gibt den Zusammenhang mit der "geometrischen" Definition aus der Schule. Wir werden im nächsten Satz sehen, daß das Rechnen in $\mathbb{C}$ viel einfacher ist !

SATZ *Die Funktionen* cos *und* sin *sind stetig und für alle* $s, t \in \mathbb{R}$ *gilt*

(i)

$$\cos t = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{i \cdot t} + e^{-i \cdot t}\right) \quad \textit{und} \quad \sin t = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{i \cdot t} - e^{-i \cdot t}\right) \ .$$

(ii) cos *und* sin *sind eine gerade bzw. eine ungerade Funktion :*

$$\cos(-t) = \cos t \quad \textit{und} \quad \sin(-t) = -\sin t \ .$$

(iii)

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

und

$$|\cos t| \, , |\sin t| \leqslant 1 \ .$$

(iv) ***Additionssätze***

$$\cos(s + t) = \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t$$

und

$$\sin(s + t) = \cos s \cdot \sin t + \sin s \cdot \cos t \ .$$

(v) ***Summen als Produkt***

$$\cos s + \cos t = 2 \cdot \cos \frac{s+t}{2} \cdot \cos \frac{s-t}{2} \quad \textit{und} \quad \cos s - \cos t = -2 \cdot \sin \frac{s+t}{2} \cdot \sin \frac{s-t}{2}$$

und

$$\sin s + \sin t = 2 \cdot \sin \frac{s+t}{2} \cdot \cos \frac{s-t}{2} \quad \textit{und} \quad \sin s - \sin t = 2 \cdot \cos \frac{s+t}{2} \cdot \sin \frac{s-t}{2} \ .$$

(vi) ***Reihenentwicklung***

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \pm \ldots$$

$$\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \pm \ldots \ .$$

Die Stetigkeit von cos und sin folgt aus dem Hauptsatz 3.4 und dem Beispiel 3.3.1.
Beweis von (i). Nach Satz 1.4 gilt

$$\cos t = \operatorname{Re}\left(e^{i \cdot t}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{i \cdot t} + \overline{e^{i \cdot t}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{i \cdot t} + e^{-i \cdot t}\right)$$

und

$$\sin t = \operatorname{Im}\left(e^{i \cdot t}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{i \cdot t} - \overline{e^{i \cdot t}}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{i \cdot t} - e^{-i \cdot t}\right) \ .$$

Beweis von (ii). Dies folgt sofort aus (i).

Beweis von (iii). Es ist

$$1 = \left|e^{i \cdot t}\right|^2 = \left(\operatorname{Re} e^{i \cdot t}\right)^2 + \left(\operatorname{Im} e^{i \cdot t}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

und somit $|\cos t|$, $|\sin t| \leqslant 1$.

Beweis von (iv). Es gilt

$$\cos(s+t) + i\cdot\sin(s+t) = e^{i\cdot(s+t)} = e^{i\cdot s}\cdot e^{i\cdot t} = \Big[\cos s + i\cdot\sin s\Big]\cdot\Big[\cos t + i\cdot\sin t\Big] =$$

$$= \Big[\cos s\cdot\cos t - \sin s\cdot\sin t\Big] + i\cdot\Big[\cos s\cdot\sin t + \sin s\cdot\cos t\Big] \ .$$

Beweis von (v). Da $s = \frac{s+t}{2} + \frac{s-t}{2}$ und $t = \frac{s+t}{2} - \frac{s-t}{2}$, folgt

$$\Big[\cos s + \cos t\Big] + i\cdot\Big[\sin s + \sin t\Big] = e^{i\cdot s} + e^{i\cdot t} = e^{\frac{s+t}{2}}\cdot e^{\frac{s-t}{2}} + e^{\frac{s+t}{2}}\cdot e^{-\frac{s-t}{2}} =$$

$$= e^{\frac{s+t}{2}}\cdot\Big[e^{\frac{s-t}{2}} + e^{-\frac{s-t}{2}}\Big] = \Big[\cos\frac{s+t}{2} + i\cdot\sin\frac{s+t}{2}\Big]\cdot 2\cdot\cos\frac{s-t}{2} =$$

$$= 2\cdot\cos\frac{s+t}{2}\cdot\cos\frac{s-t}{2} + i\cdot\Big[2\cdot\sin\frac{s+t}{2}\cdot\cos\frac{s-t}{2}\Big] \ .$$

und

$$\Big[\cos s - \cos t\Big] + i\cdot\Big[\sin s - \sin t\Big] = e^{i\cdot s} - e^{i\cdot t} = e^{\frac{s+t}{2}}\cdot e^{\frac{s-t}{2}} - e^{\frac{s+t}{2}}\cdot e^{-\frac{s-t}{2}} =$$

$$= e^{\frac{s+t}{2}}\cdot\Big[e^{\frac{s-t}{2}} - e^{-\frac{s-t}{2}}\Big] = \Big[\cos\frac{s+t}{2} + i\cdot\sin\frac{s+t}{2}\Big]\cdot 2i\cdot\sin\frac{s-t}{2} =$$

$$= -2\cdot\sin\frac{s+t}{2}\cdot\sin\frac{s-t}{2} + i\cdot\Big[2\cdot\cos\frac{s+t}{2}\cdot\sin\frac{s-t}{2}\Big] \ .$$

Beweis von (vi). Dies ergibt sich aus folgenden Formeln :

$$\cos t = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\cdot t)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\Big[(i\cdot t)^k\Big]}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{Re}\left(i^k\right)\cdot\frac{t^k}{k!}$$

und

$$\sin t = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\cdot t)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\Big[(i\cdot t)^k\Big]}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{Im}\left(i^k\right)\cdot\frac{t^k}{k!} \ ,$$

sowie

$$i^k = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{array}\right. \quad \text{falls} \quad \begin{array}{l} k\equiv 0 \bmod 4 \\ k\equiv 1 \bmod 4 \\ k\equiv 2 \bmod 4 \\ k\equiv 3 \bmod 4 \end{array} \ ,$$

da $i^4 = 1$, d.h.

$$\operatorname{Re}\left(i^k\right) = \left\{\begin{array}{c} (-1)^{\frac{k}{2}} = (-1)^j \\ \\ 0 \end{array}\right. \quad \text{für} \quad \begin{array}{c} k = 2j \text{ gerade} \\ \\ k \text{ ungerade} \end{array}$$

und

$$\operatorname{Im}\left(i^k\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & & k \text{ gerade} \\ & \text{für} & \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} = (-1)^j & & k = 2j+1 \text{ ungerade} \end{array} \right. .$$

Beweis von (vii). $\square$

3.7 Die Zahl π

Diese Zahl wird geometrisch als das Verhältnis des Kreisumfang zur Kreisdurchmesser definiert. Also ist der Umfang des Einheitskreises, dessen Durchmesser 2 ist, gleich 2π . Wegen Symmetrien ist also die Länge des Kreisbogen von 1 bis i gleich $\frac{\pi}{2}$ und ist gleichzeitig die erste Nullstelle von cos in $\mathbb{R}_+$. Deshalb

SATZ

(i) *Es gilt* $\sin 0 = 0$ *und* $\sin > 0$ *auf* $]0,2]$.

(ii) $\cos 0 = 1$ *und* cos *ist auf* $[0,2]$ *streng monoton fallend.*

(iii) *Es gibt genau eine Nullstelle von* cos *in* $]0,2[$.

Beweis von (i). Es gilt

$$\sin 0 = \operatorname{Im} e^0 = \operatorname{Im} 1 = 0 \ .$$

Für alle $t \in\,]0,2]$ und alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \leqslant \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} \ ,$$

da $t^2 \leqslant 4 \leqslant (2k+1) \cdot 2k$, also folgt

$$\sum_{k=2}^{l} (-1)^k \cdot \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!}\right) + \ldots + \left(\frac{t^{2l-1}}{(2j-1)!} - \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!}\right) & l \text{ ungerade} \\ \left(\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!}\right) + \ldots + \left(\frac{t^{2l-3}}{(2l-3)!} - \frac{t^{2l-1}}{(2l-1)!}\right) + \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!} & l \text{ gerade} \end{array} \right. \geqslant 0$$

und somit

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t\left(1 - \frac{t^2}{3!}\right) + \lim\nolimits_{l\to\infty} \sum_{k=2}^{l} (-1)^k \cdot \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \geqslant$$

$$\geqslant t\left(1 - \frac{t^2}{3!}\right) > 0 \ ,$$

da $\frac{2^2}{3!} = \frac{2}{3} < 1$.

Beweis von (ii). Es gilt

$$\cos 0 = \operatorname{Re} e^0 = \operatorname{Re} 1 = 1 \ .$$

Für alle $s, t \in [0,2]$ mit $s > t$ ist nach Satz 3.6.v und (i)

$$\cos s - \cos t = -2 \cdot \sin \frac{s+t}{2} \cdot \sin \frac{s-t}{2} < 0 \ ,$$

da $\frac{s+t}{2}$, $\frac{s-t}{2} \in\,]0,2]$, also $\cos s < \cos t$.

Beweis von (iii). Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant 2$ gilt

$$\frac{2^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{2^{2k-2}}{(2k-2)!} \ ,$$

da $4 \leqslant 2k \cdot (2k-1)$, also folgt

$$\sum_{k=3}^{l} (-1)^k \cdot \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \begin{cases} \left(-\frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!}\right) + \ldots + \left(-\frac{t^{2l-2}}{(2j-2)!} + \frac{t^{2l}}{(2l)!}\right) & l \text{ gerade} \\ \left(-\frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!}\right) + \ldots + \left(-\frac{t^{2l-4}}{(2l-4)!} + \frac{t^{2l-2}}{(2l-2)!}\right) - \frac{t^{2l}}{(2l)!} & l \text{ ungerade} \end{cases} \leqslant 0$$

und somit

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} + \lim_{l\to\infty} \sum_{k=3}^{l} (-1)^k \cdot \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} < 0 \ .$$

Da $\cos 0 = 1$, existiert nach dem Zwischenwertsatz 3.2 eine Nullstelle von cos in $]0, 2[$. Sie ist eindeutig weil cos streng monoton fällt. □

DEFINITION 1 Die einzige Nullstelle von cos in $]0, 2[$ wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet.

KOROLLAR

(i) *Es gilt* $\cos > 0$ *auf* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *und* sin *ist auf* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *streng monoton wachsend.*

(ii) *Einfachste Werte*

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$e^{i\cdot t}$	1	i	-1	$-i$	1
$\cos t$	1	0	-1	0	1
$\sin t$	0	1	0	-1	0

,

insbesondere gilt

$$e^{i\cdot\pi} = -1 \ .$$

(iii) *Die Funktionen* $e^{i\cdot\mathrm{id}}$ *,* cos *und* sin *sind* 2π*-periodisch, d.h. für alle* $t \in \mathbb{R}$ *und* $k \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$e^{i\cdot t} = e^{i\cdot(t+k\cdot 2\pi)} \quad , \quad \cos t = \cos(t + k\cdot 2\pi) \quad \text{und} \quad \sin t = \sin(t + k\cdot 2\pi) \ .$$

(iv) *Für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t \quad , \quad \cos(t - \pi) = -\cos t$$

und

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t \quad , \quad \sin(t - \pi) = -\sin t \ .$$

Beweis von (i). Für alle $s, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $s < t$ ist nach Satz 3.6.v

$$\sin s - \sin t = 2 \cdot \cos \frac{s+t}{2} \cdot \sin \frac{s-t}{2} = -2 \cdot \cos \frac{s+t}{2} \cdot \sin \frac{t-s}{2} < 0 \ ,$$

da $\frac{s+t}{2}$, $\frac{t-s}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ und somit $\cos \frac{s+t}{2}$, $\sin \frac{t-s}{2} > 0$.

Beweis von (ii). Die erste Spalte folgt aus *dem* Satz, (i) und (ii). Aus $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, bekommt man $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ und somit die zweite Spalte. Für die nächsten genügt es zu bemerken, daß

$$e^{i \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} = \left(e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}\right)^k = i^k = \begin{cases} 1 & \\ i & \\ -1 & \text{falls} \\ -i & \end{cases} \begin{matrix} k \equiv 0 \bmod 4 \\ k \equiv 1 \bmod 4 \\ k \equiv 2 \bmod 4 \\ k \equiv 3 \bmod 4 \end{matrix} \ ,$$

Beweis von (iii). Aus (ii) folgt

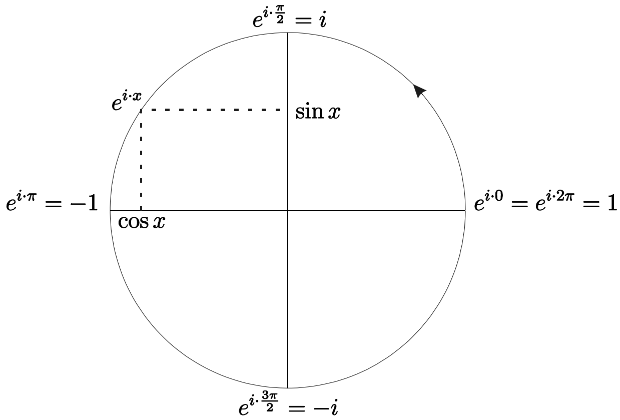
$$e^{i \cdot (t + k \cdot 2\pi)} = e^{i \cdot t} \cdot e^{i \cdot k \cdot 2\pi} = e^{i \cdot t} \cdot \left(e^{i \cdot 2\pi}\right)^k = e^{i \cdot t} \ .$$

Beweis von (iv). Dies folgt sofort aus den Additionssätze 3.6.ii. □

BEMERKUNG 1 Im nächsten Paragraph werden wir sehen (Hauptsatz 3.8), daß

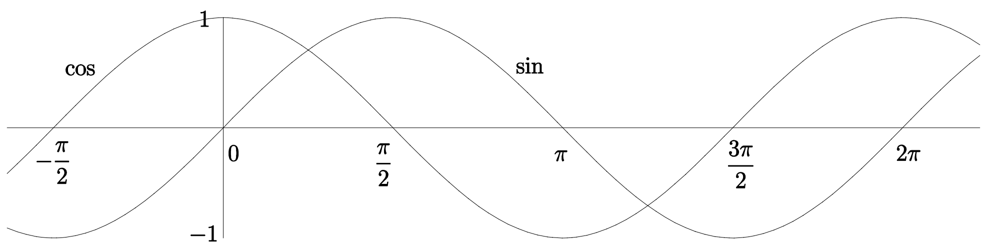
$$e^{i \cdot \mathrm{id}} : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{U} : t \longmapsto e^{i \cdot t}$$

eine Bijektion ist. Wenn t das Intervall $[0, 2\pi[$ durchläuft, so wird $\mathbb{U}$ mit $e^{i \cdot t}$ im positiven (mathematischen) Umlaufsinn (negativer Uhrzeigersinn) durchgelaufen.



$\mathbb{U} := \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\} = \left\{e^{i \cdot x} \mid x \in [0, 2\pi]\right\}$

Die Koordinatenfunktion dieser Punkt sind cos und sin :



BEMERKUNG 2 Archimedes hat mit regulären ein- und ausgeschriebenen Polygonen mit 96 Ecken gezeigt, daß

$$\frac{223}{71} = 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \ ,$$

wobei

$$\frac{223}{71} = 3.\overline{140\,845\,070\,422\,535\,211\,267\,605\,633\,802\,816\,90}$$

und

$$\frac{22}{7} = 3.\overline{142\,857} \ .$$

Heute ist es leicht, viele Dezimalstellen von π zu bekommen :

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\,1\ldots$$

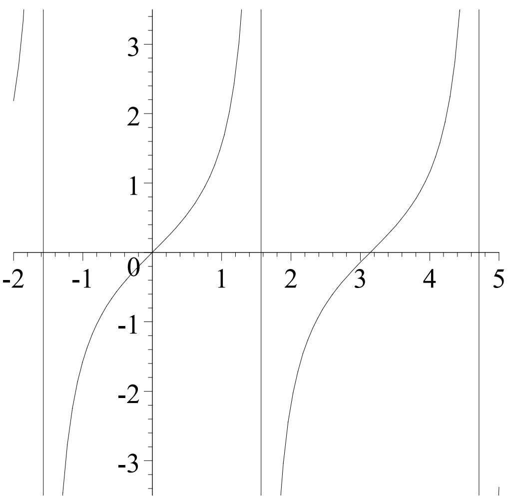
BEMERKUNG Als Eselsbrücke kann man folgender Satz benutzen :

wie,	o	dies	π	macht	ernstlich	so	vielen	viele	Müh
3,	1	4	1	5	9	2	6	5	3

DEFINITION 2 Sei

$$\tan : \mathbb{R} \smallsetminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}\right) \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \tan t := \frac{\sin t}{\cos t}$$

die *Tangensfunktion* .



Es gilt

$$\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}+} \tan t = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-} \tan t = \infty$$

und tan ist auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend.

3.8 Polarkoordinaten

Mit Hilfe des Satzes und des Korollars 3.7 sieht man, daß die Funktionen

$$\cos_{|[0,\pi]} : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] \quad \text{und} \quad \sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$$

stetig und streng monoton fallend bzw. wachsend sind. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion 3.2 ergibt sich die

DEFINITION 1 Die stetigen Funktionen

$$\arccos := \overset{-1}{\cos}_{|[0,\pi]} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \subset \mathbb{R}$$

und

$$\arcsin := \overset{-1}{\sin}_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}$$

heißen *Arcus-Cosinus-* und *Arcus-Sinus-Funktionen* .

HAUPTSATZ *Die Funktion*

$$e^{i\cdot\mathrm{id}} : [0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{U} : t \longmapsto e^{i\cdot t}$$

ist bijektiv, und ihre Umkehrfunktion

$$\arg := \overset{-1}{e^{i\cdot\mathrm{id}}} : \mathbb{U} \longrightarrow [0,2\pi[$$

ist für $u = \alpha + i\cdot\beta \in \mathbb{U}$ mit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ durch

$$\arg u = \begin{cases} \arccos\alpha & \\ & \textit{falls} \\ 2\pi - \arccos\alpha & \end{cases} \begin{matrix} \beta \geqslant 0 \\ \\ \beta < 0 \end{matrix} \quad .$$

gegeben.

Sei $u = \alpha + i\cdot\beta \in \mathbb{U}$ mit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Die Gleichung

$$\cos t + i\cdot\sin t = e^{i\cdot t} = u = \alpha + i\cdot\beta \ ,$$

d.h. das System

$$\begin{aligned} \cos t &= \alpha \\ \sin t &= \beta \end{aligned}$$

ist in $[0,2\pi[$ eindeutig lösbar : Aus $\alpha^2+\beta^2 = 1$, folgt $\alpha \in [-1,1]$, und man sieht aus der Symmetrie und den Periodizitätseigenschaften von cos , daß alle Lösungen von $\cos t = \alpha$ der Gestalt

$$\pm\arccos\alpha + k\cdot 2\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

sind. Da $\arccos\alpha \in [0,\pi]$, kommen nur $\arccos\alpha$ und $2\pi - \arccos\alpha$ in Frage. Wegen

$$\sin t = \operatorname{signum}(\sin t) \cdot \sqrt{1-\cos^2 t}$$

und $\sin(\arccos\alpha) \geqslant 0$ folgt

$$\sin(\arccos\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos\alpha)} = |\beta|$$

und

$$\sin(2\pi - \arccos\alpha) = -\sin(\arccos\alpha) = -\sqrt{1-\cos^2(\arccos\alpha)} = -|\beta|$$

und somit die Behauptung. □

DEFINITION 2 Die Funktion

$$\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow [0,2\pi[\,: z \longmapsto \arg z := \arg \frac{z}{|z|}$$

nennt man *Argumentfunktion* .

KOROLLAR *Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ hat eine eindeutige Darstellung in* ***Polarkoordinaten*** *:*

$$z = r \cdot e^{i\cdot\varphi} \quad \textit{mit} \quad r \in \mathbb{R}_+^* \ \textit{und}\ \varphi \in [0,2\pi[\ ;$$

es gilt

$$r = |z| \quad \textit{und} \quad \varphi = \arg z \ .$$

Man schreibt auch

$$z = |z| \cdot \operatorname{signum} z = |z| \cdot e^{i\cdot\arg z} \ .$$

Die Existenz ergibt sich aus dem Hauptsatz und obiger Zeile, da

$$\operatorname{signum} z := \frac{z}{|z|} \in \mathbb{U} \ .$$

Ist $z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$, so ist $r = |r \cdot e^{i\cdot\varphi}| = |z|$ und somit $e^{i\cdot\varphi} = \operatorname{signum} z = e^{i\cdot\arg z}$, also $\varphi = \arg z$, d.h. es folgt die Eindeutigkeit. □

DEFINITION 3 Für $z \in \mathbb{C}^*$ heißt $\arg z$ der Winkel zu z im *Bogenmaß* . Die Zahl $\frac{360°}{2\pi} \cdot \arg z$ heißt Winkel zu z im *Gradmaß* .

Damit entsprechen die Winkel im Bogenmaß $\frac{\pi}{2}$, π und $\frac{3\pi}{2}$ bzw. die Winkel im Gradmaß $90°$, $180°$ und $270°$.

BEMERKUNG 1 Statt $[0,2\pi[$ für die Werte der Argumentfunktion kann man z.B. auch $]-\pi,\pi]$ oder $]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ wählen. Dann gilt

$$\arg u = \begin{cases} \arccos\alpha & \\ & \text{si} \\ -\arccos\alpha & \end{cases} \begin{matrix} \beta \geqslant 0 \\ \\ \beta < 0 \end{matrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \arg u = \begin{cases} \arcsin\beta & \\ & \text{si} \\ \pi - \arcsin\beta & \end{cases} \begin{matrix} \alpha \geqslant 0 \\ \\ \alpha < 0 \end{matrix} \ .$$

BEMERKUNG 2 Schreibt man

$$x + i \cdot y = z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} \ ,$$

so ist

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad .$$

Man spricht von den Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Interpretation der Multiplikation in $\mathbb{C}$

Für alle $z, w \in \mathbb{C}^*$ gilt

$$z \cdot w = |z| \cdot e^{i \cdot \arg z} \cdot |w| \cdot e^{i \cdot \arg w} = |z| \cdot |w| \cdot e^{i \cdot (\arg z + \arg w)} \ ,$$

d.h die Multiplikation komplexer Zahlen entspricht der Multiplikation der Beträge und der Addition der Argumente.

Aber es gilt nur

$$\arg (z \cdot w) \equiv \arg z + \arg w \mod 2\pi \ !$$

SATZ *Für alle $w \in \mathbb{C}$ sind die komplexen Zahlen*

$$|w|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \cdot \frac{(\arg w + 2\pi \cdot k)}{n}} \quad \textit{für } k = 0, \ldots, n-1$$

die Lösungen von $z^n = w$.

Insbesondere sind

$$\pm \sqrt{w} \ ,$$

wobei

$$\sqrt{w} := |w|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\arg w}{2}} \ .$$

die Lösungen von $z^2 = w$.

Der Beweis wird dem Leser überlassen. □

Ob man $[0, 2\pi[$ oder $]-\pi, \pi]$ benutzt, so gilt $\sqrt{-1} = i$.

BEMERKUNG 3 **Achtung !** mit der Benutzung von $\sqrt{\cdot}$. Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \ ,$$

aber nicht

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \ .$$

Der Fehler hängt an folgende Tatsache :

$$\arg \left((-1)^2 \right) = \arg (1) = 0 \neq 2\pi = \arg (-1) + \arg (-1) \ ,$$

d.h.

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)^2} \ .$$