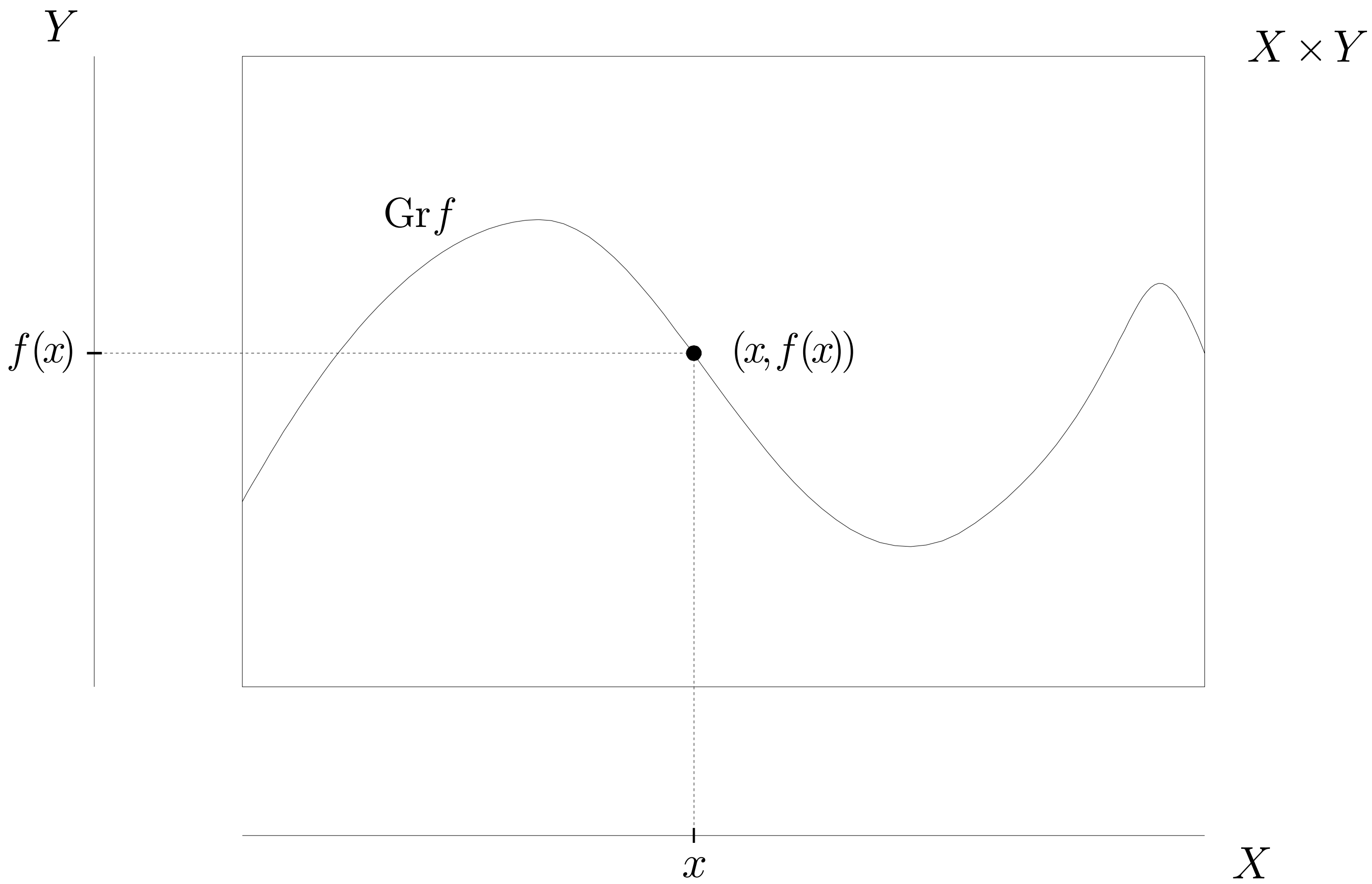
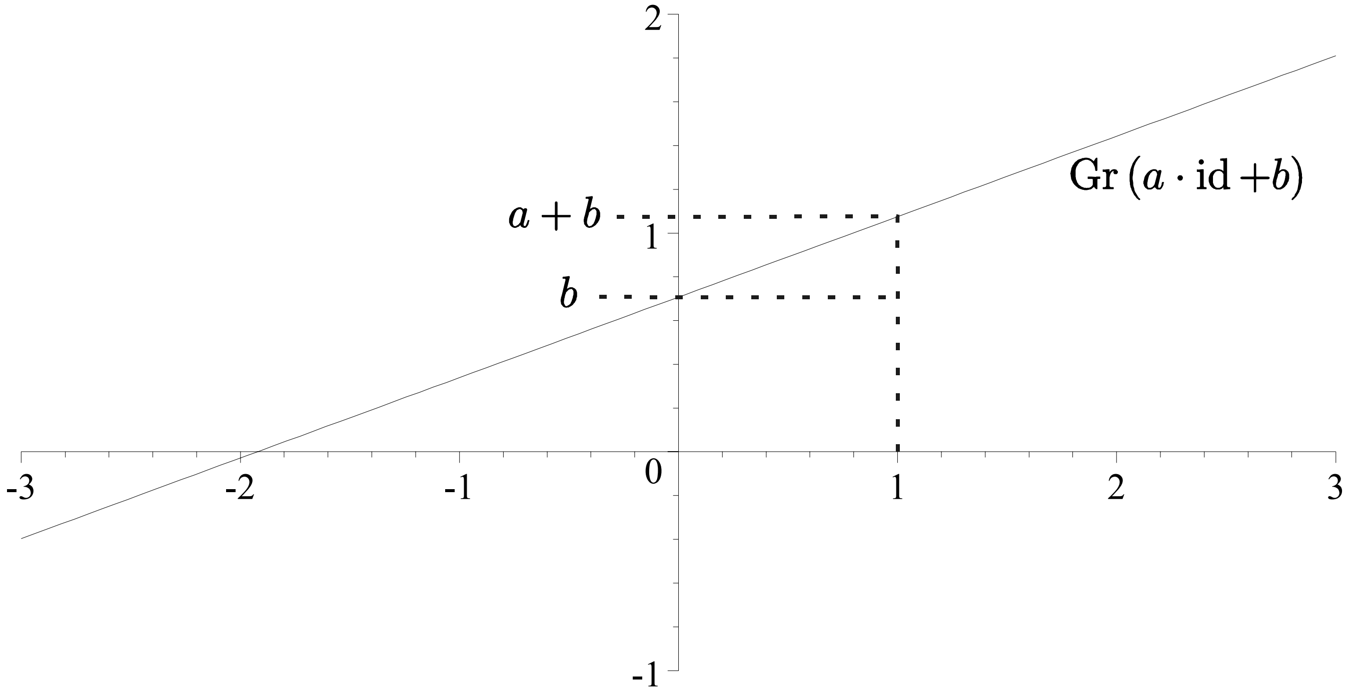
Claude Portenier 8. Juli 2005

Mathematik II

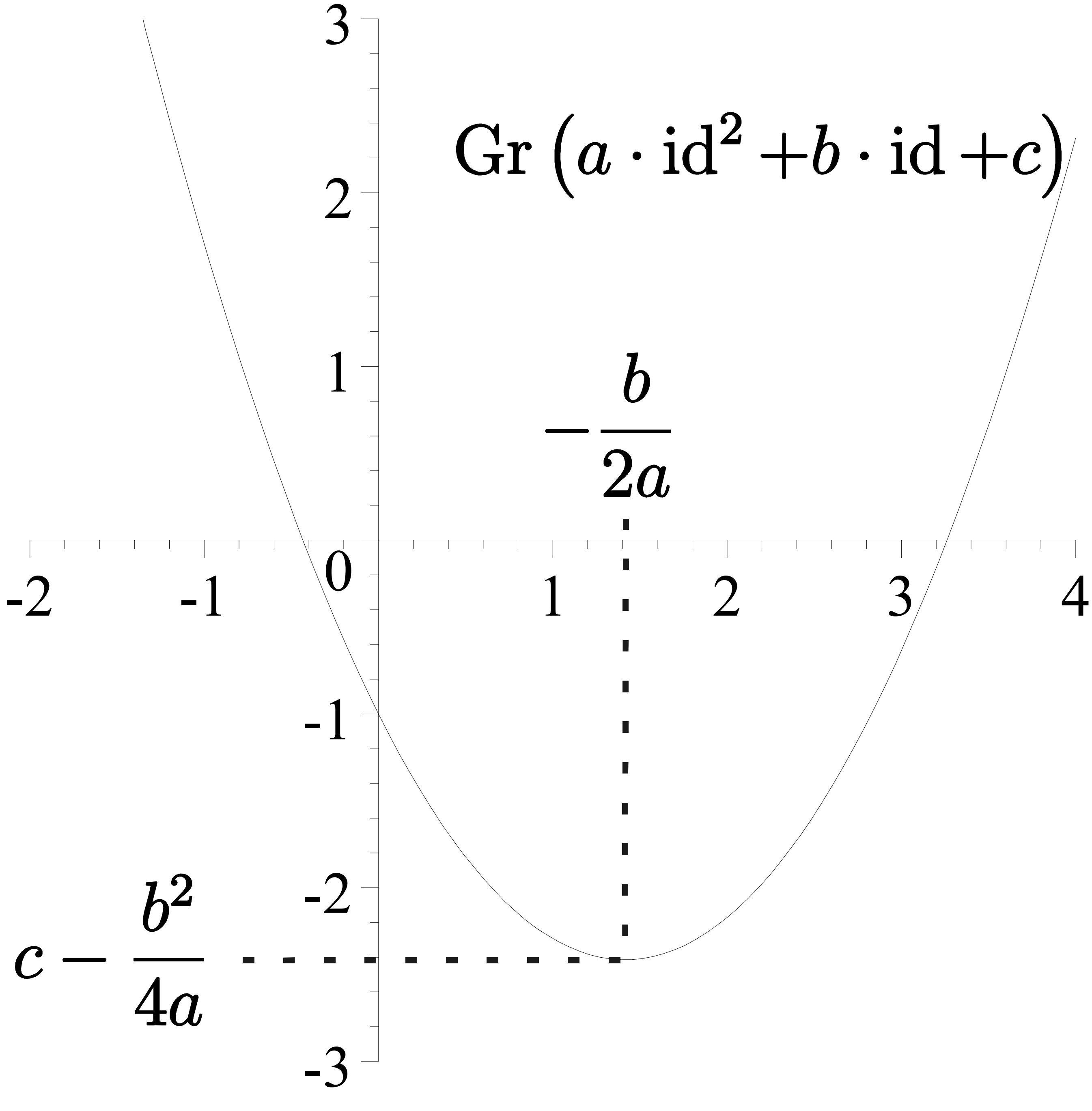
Folien

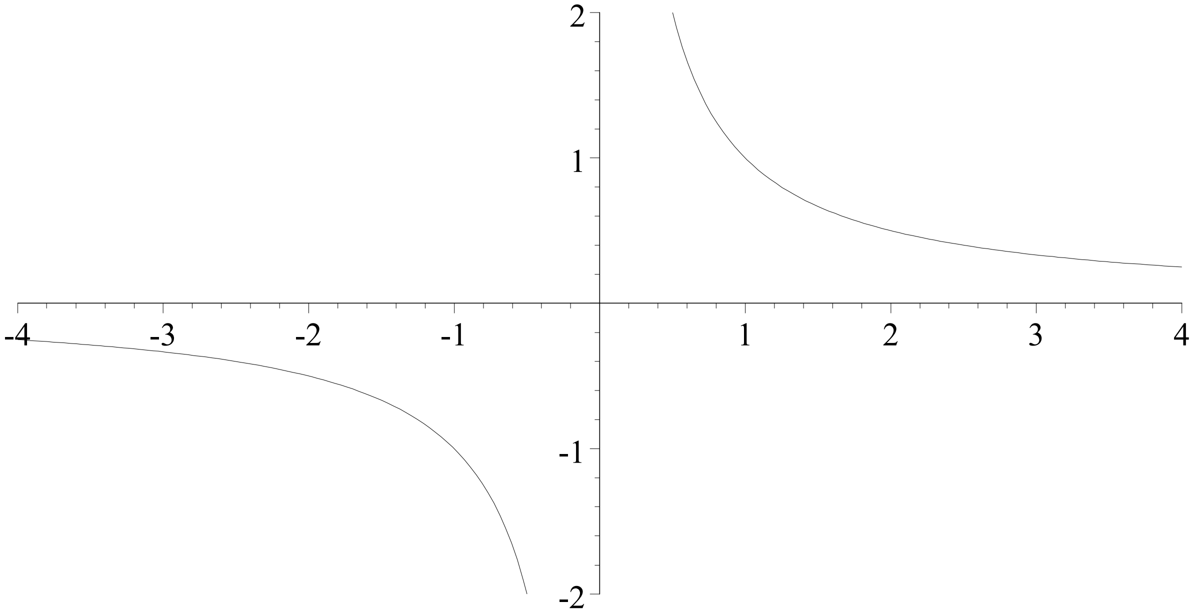


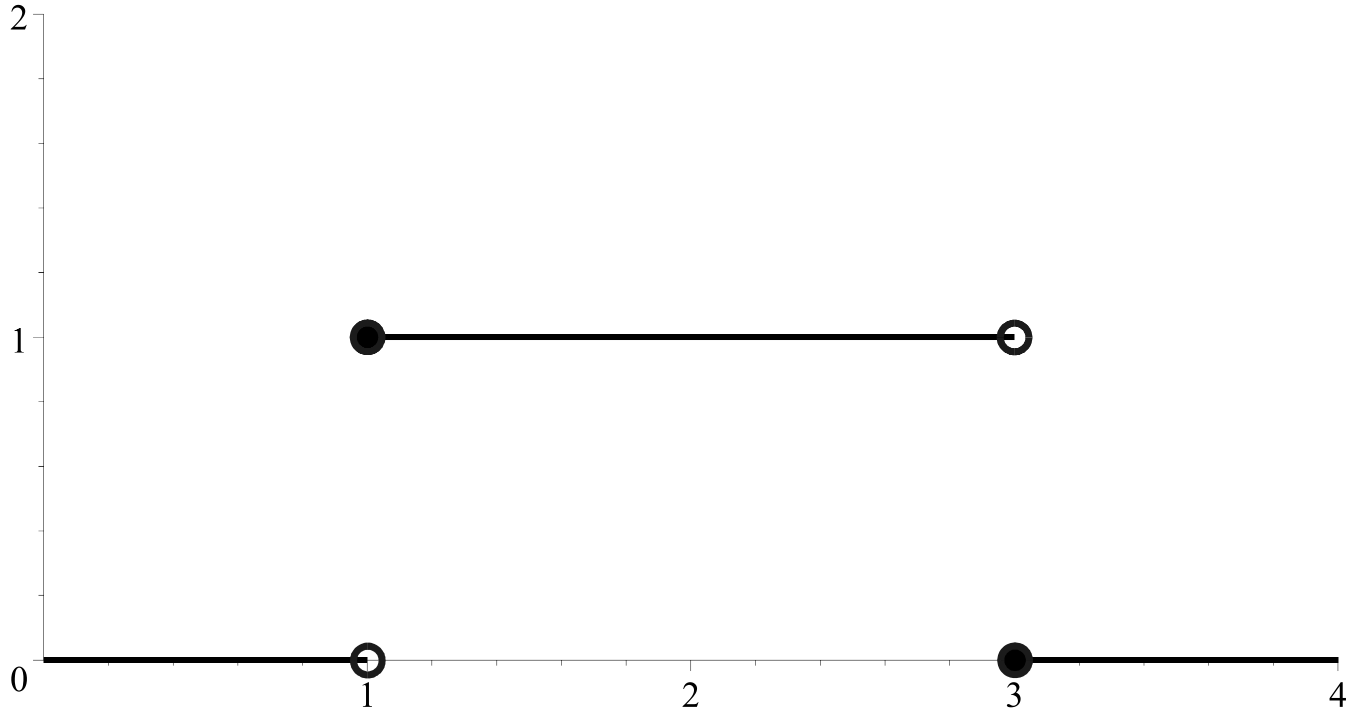
Y
$X \times Y$
$\mathrm{Gr}\, f$
$f(x)$
$(x, f(x))$
x
X

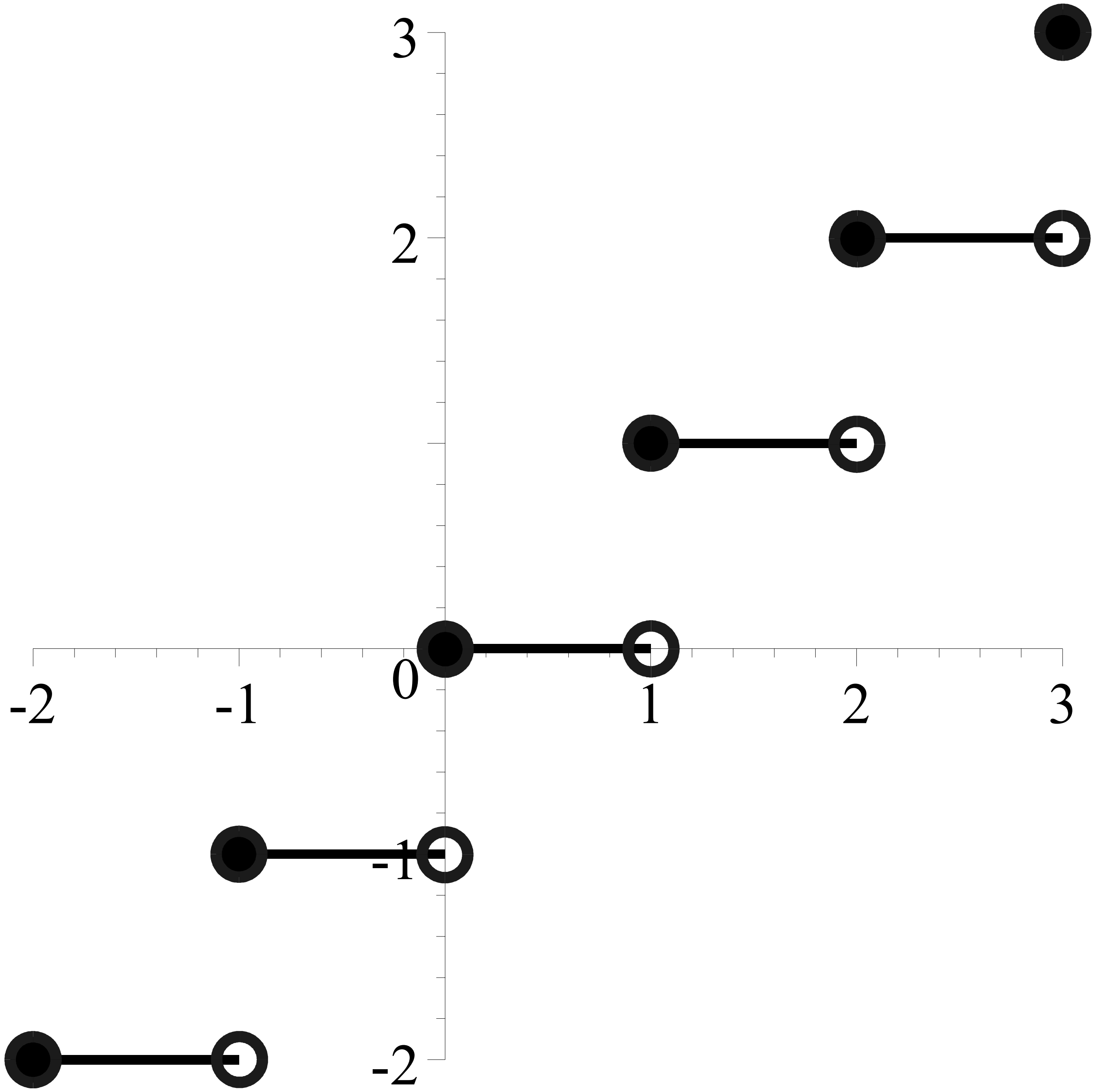


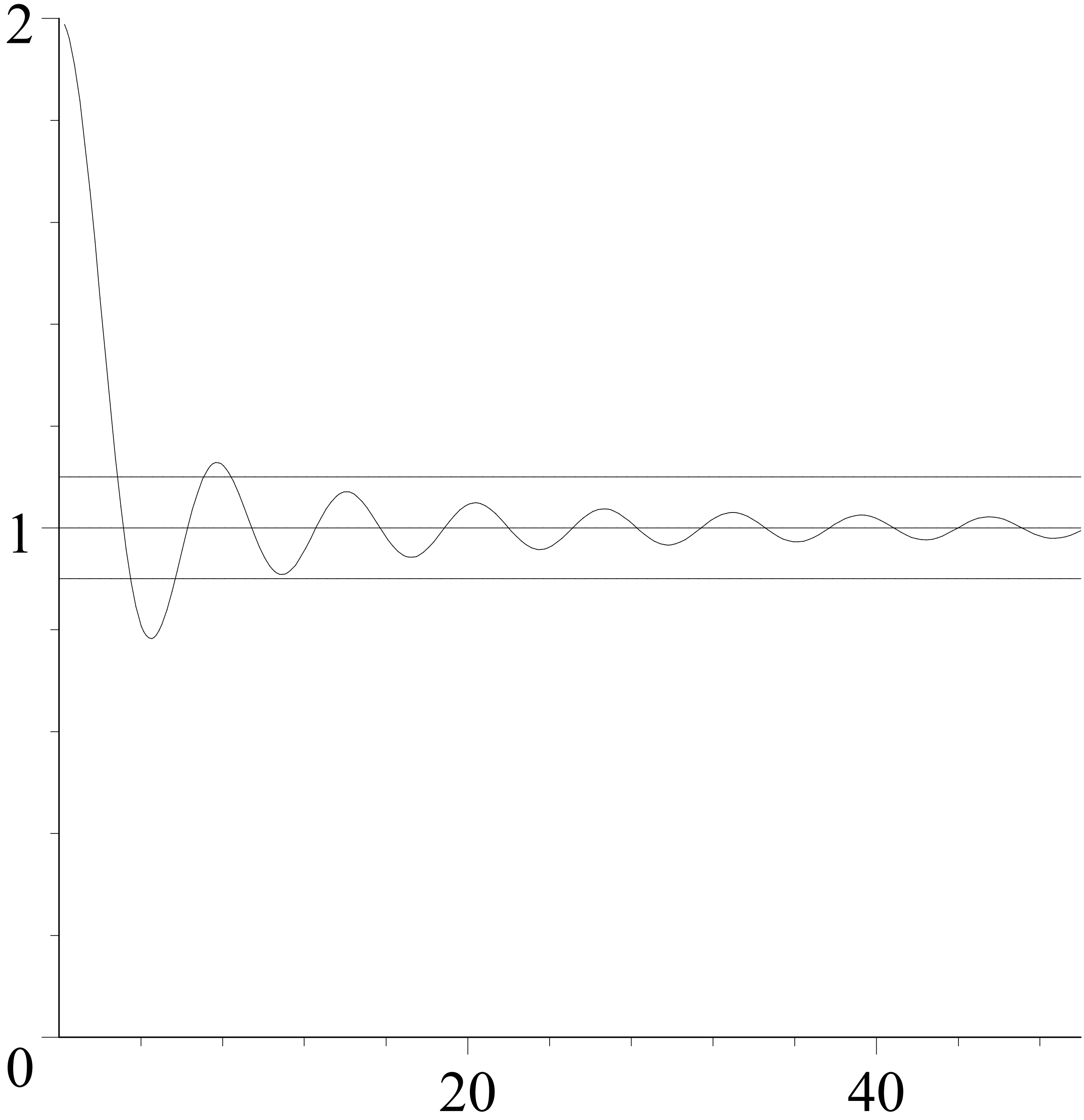
2
1
0
-1
-3
-2
-1
1
2
3
$a+b$
b
$\mathrm{Gr}\,(a \cdot \mathrm{id} + b)$


$\mathrm{Gr}\left(a \cdot \mathrm{id}^2 + b \cdot \mathrm{id} + c\right)$
$-\frac{b}{2a}$
$c - \frac{b^2}{4a}$
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
1
2
3
4

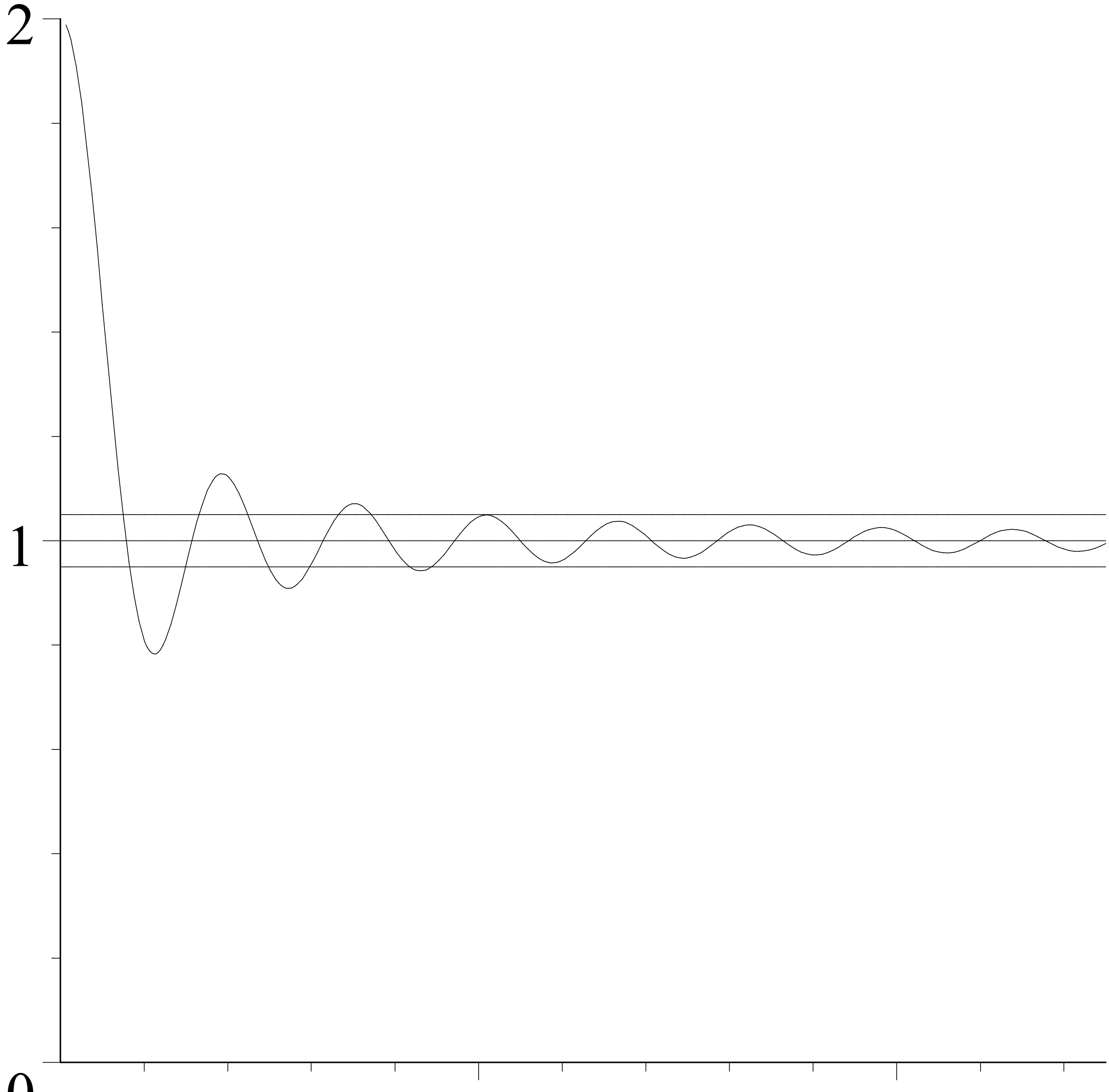

2
1
-1
-2
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4


2
1
0
1
2
3
4

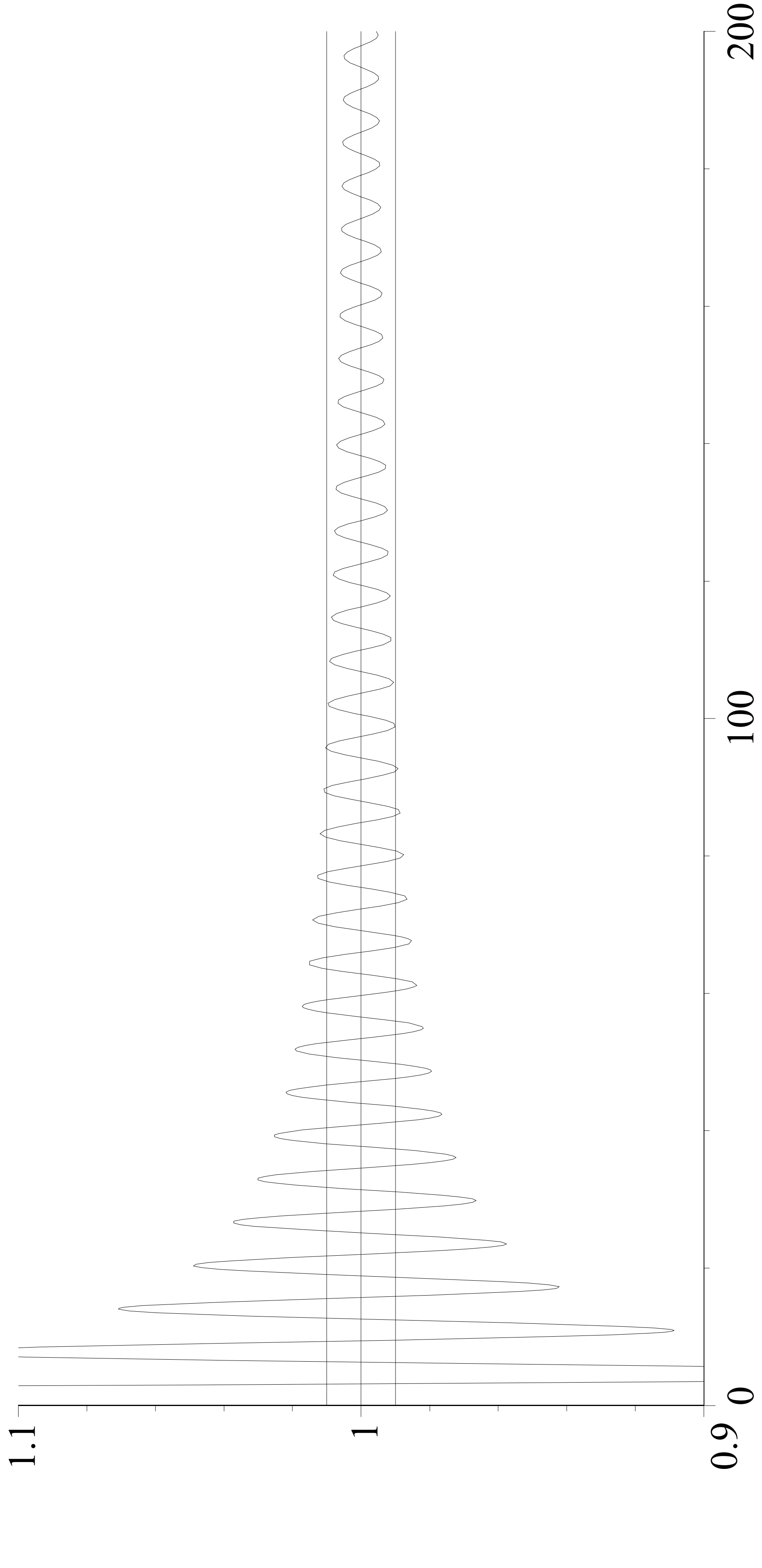

3
2
0
-1
-2
-2
-1
1
2
3



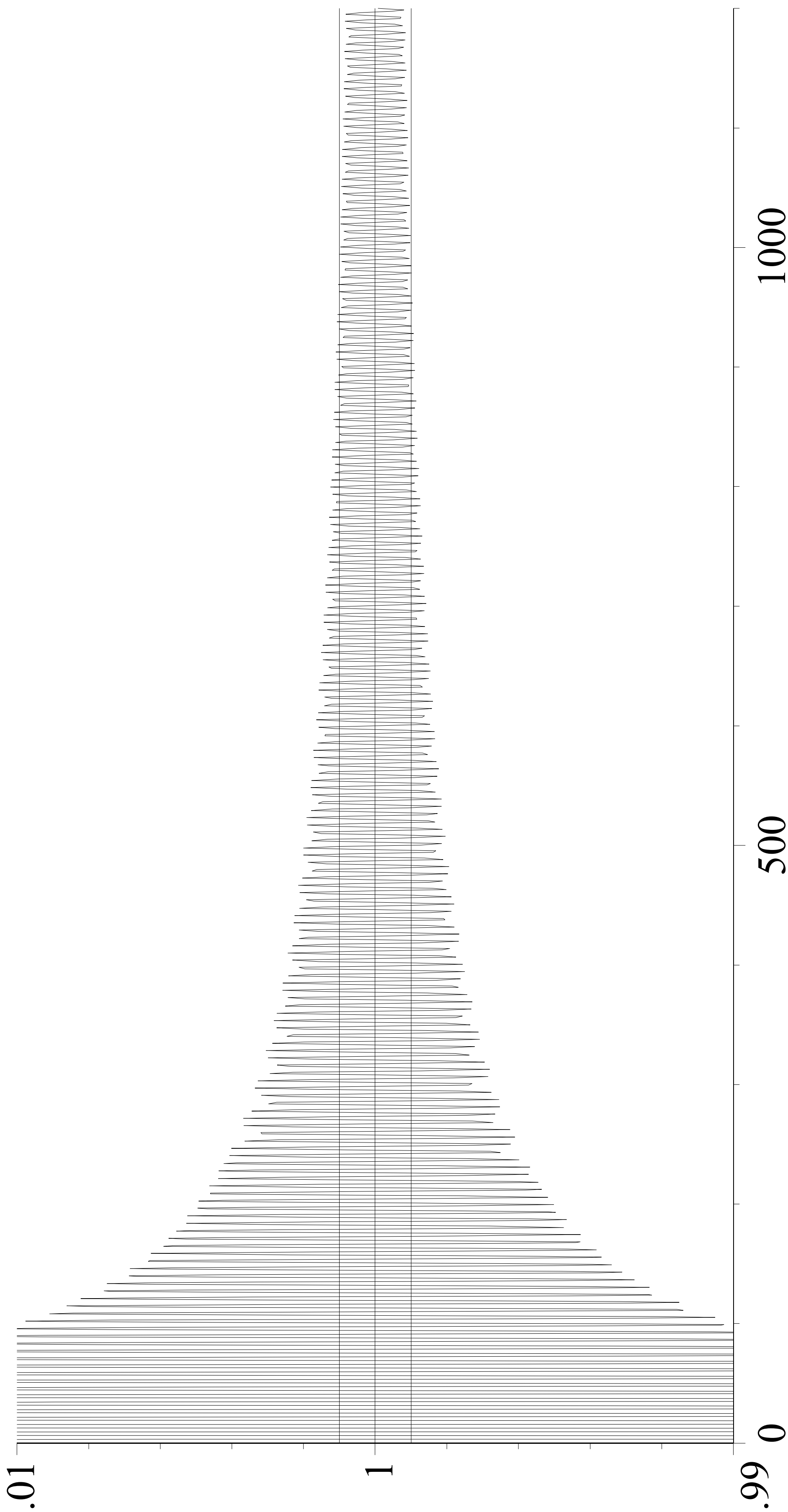
$\varepsilon = 0.1$ und $r \geqslant 10$



$\varepsilon = 0.05$ und $r \geqslant 20$



0
100
200
1.1
1
0.9


1.01
1
0.99
0
500
1000

Rechenregeln für Grenzwerte

DEFINITION (Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$) Für $c \in \overline{\mathbb{R}}$ sei

$$c + \infty = \infty \quad \text{falls } c \neq -\infty \, ,$$

$$c - \infty = -\infty \quad \text{falls } c \neq \infty \, ,$$

$$c \cdot \infty = \infty \quad \text{falls } c > 0 \, ,$$

$$c \cdot \infty = -\infty \quad \text{falls } c < 0 \, ,$$

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0 \quad \text{falls } c \neq \pm\infty \, .$$

Die Fälle

$$\infty - \infty = \infty + (-\infty) \quad , \quad \pm\infty \cdot 0 \quad , \quad \frac{c}{0} \quad , \quad \frac{\pm\infty}{\infty}$$

sind nicht definiert.

Man beachte, daß $\overline{\mathbb{R}}$ kein Körper ist !

HAUPTSATZ *Seien* $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *und* $a \in \overline{D_f}$. ***Existieren*** $\lim_{x \to a} f(x)$ ***und*** $\lim_{x \to a} g(x)$ ***und ist die rechte Seite in*** $\overline{\mathbb{R}}$ ***oder*** $\mathbb{C}$ ***definiert,*** *so gilt :*

(i) ***Faktorregel***

$$\lim_{x \to a} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \to a} f(x) \ .$$

(ii) ***Summenregel***

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \ .$$

(iii) ***Produktregel***

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \ .$$

(iv) ***Quotientenregel***

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \text{ , falls } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0 \ .$$

Falls $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ *, aber* $g > 0$ *in einer Umgebung von* a *, bzw.* $g < 0$ *in einer Umgebung* V *von* a *, so gilt*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \cdot \lim_{x \to a} f(x) \text{ , falls } \lim_{x \to a} f(x) \neq 0 \ .$$

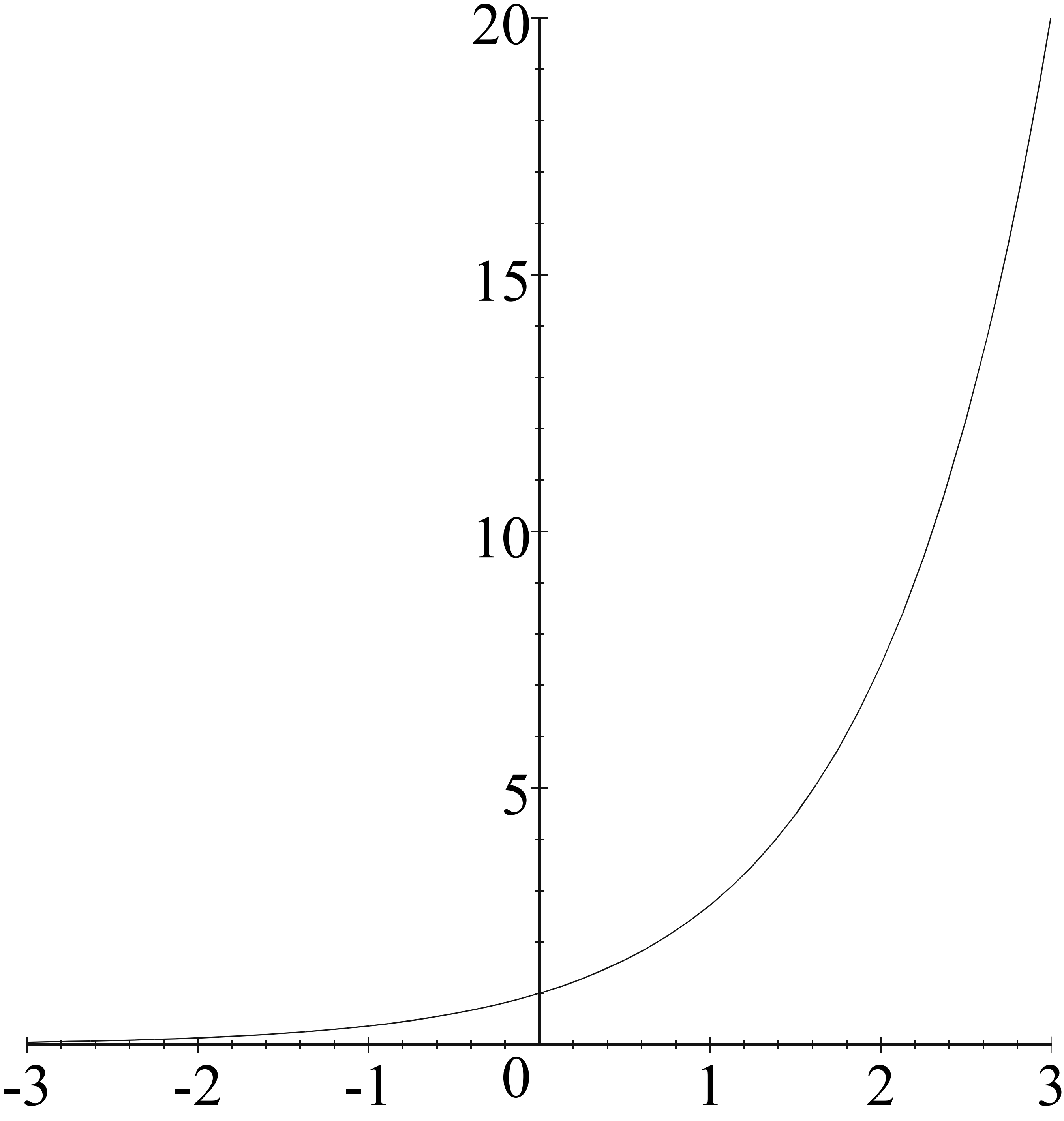
(v) ***Einsetzungsregel*** *Sei* $h : D_h \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $b \in \overline{D_h}$ *, so daß* $h(D_h) \subset D_f$ *, d.h.* $f \circ h$ *ist definiert. Falls*

$$\lim_{u \to b} h(u) = a \ ,$$

so gilt

$$\lim_{u \to b} f(h(u)) = \lim_{x \to a} f(x) \ .$$

Man sagt auch, daß man die ***Variablenänderung*** $x = h(u)$ *durchgeführt hat.*



Exponentialfunktion

Man nehme $10\,\mathrm{cm}$ als Einheit

x	-3	-1	0	1	3	10
e^x	0.049	0.36	1	2.71	20.08	$2.20 \cdot 10^4$

x	22	29
e^x	$3.58 \cdot 10^9$	$3.93 \cdot 10^{12}$
$e^x \cdot 10\,\mathrm{cm}$	fast zum Mond	weiter als die Sonne

63
$2.29 \cdot 10^{27}$
doppelten Durchmesser des Universums

Die Distanz Erde-Mond ist

$$3.65 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \quad \text{bzw.} \quad 4.07 \cdot 10^8\,\mathrm{m}\ ,$$

die Distanz Erde-Sonne

$$1.47 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \quad \text{bzw.} \quad 1.52 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}\ .$$

Das Durchmesser des Universums, der

$$\text{ungefähr } 10^{10} \text{ Lichtjahre}$$

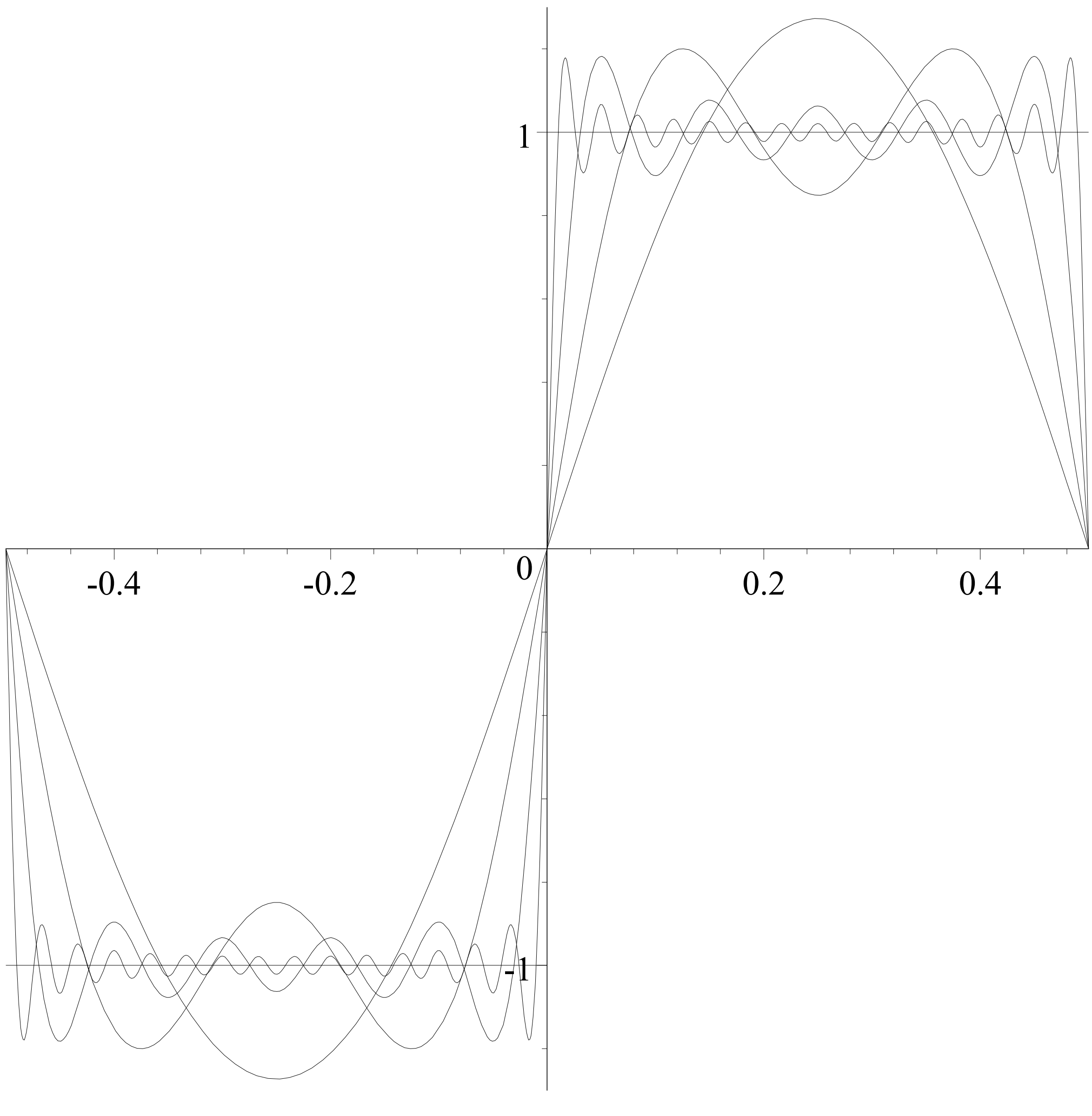
beträgt,

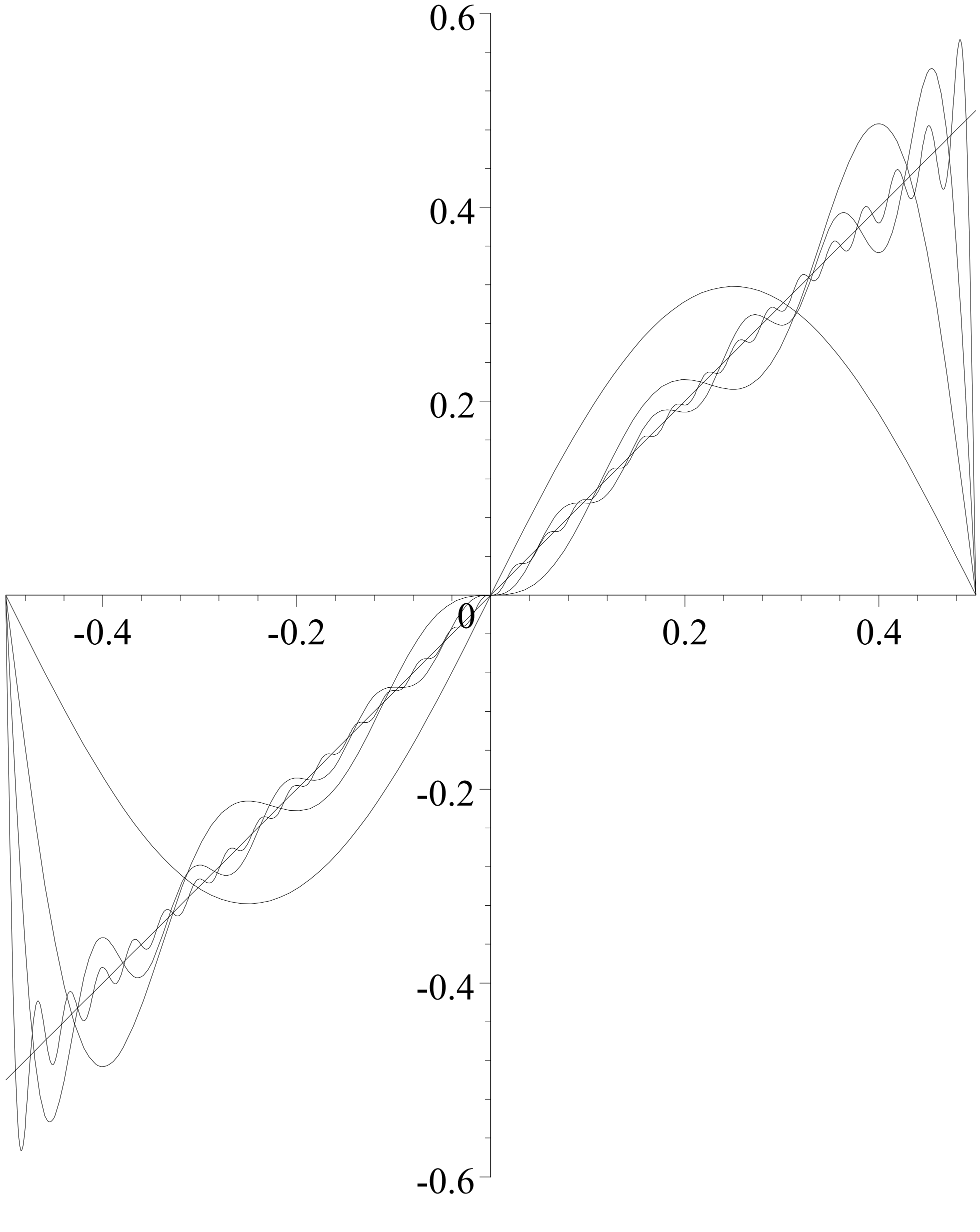
$$1 \text{ Lichtjahr ist } 9.46 \cdot 10^{12}\,\mathrm{km} \simeq 10^{16}\,\mathrm{m}\ ,$$

ist also

$$\text{ungefähr } 10^{26}\,\mathrm{m}\ .$$

Mathematik II Folien




0.6
0.4
0.2
0
-0.4
-0.2
0.2
0.4
-0.2
-0.4
-0.6

Mathematatik II Folien