Chapitre 4

NEWTON

Version du 19 juillet 2006

4.1 La série géométrique et les logarithmes

Isaac Newton : 1643 - 1727

Newton a commencé ses études à Cambridge en 1661 et reçu son B.A en 1665 , après avoir suivi entre 1664 et 1665 les cours de Barrow. Il succéda en 1669 à Barrow qui avait obtenu en 1663 la première chaire comme *Lucasian Professor of Mathematics* . Il est resté à Cambridge jusqu'en 1696 , puis s'en alla à Londres pour servir comme Warden of the Mint.

Entre 1650 et 1660 le caractère logarithmique de la surface délimitée par l'hyperbole était bien connue (cf. Grégoire de Saint-Vincent, 3.6). Dans un manuscript probablement écrit en 1667 , mais reprenant des travaux antérieurs, Newton calcule systématiquement des logarithmes. Il considère l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{1+x}$ et constate tout d'abord par "longue" division que

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
\underline{1} & \underline{+x} & & & \\
 & -x & & & \\
 & \underline{-x} & \underline{-x^2} & & \\
 & & x^2 & & \\
 & & \underline{x^2} & \underline{+x^3} & \\
 & & & -x^3 & \\
 & & & \underline{-x^3} & \underline{-x^4} \\
 & & & & x^4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1+x \\ \hline 1 \quad -x \quad +x^2 \quad -x^3 \quad \pm \ldots
\end{array}
\quad ,
$$

i.e.

$$
\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \ldots
$$

et calcule la surface, que nous noterons $S(1+x)$, délimitée par cette hyperbole entre 0 et x en l'intégrant terme à terme. Il obtient donc

$$
S(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots \quad . \tag{$*$}
$$

Il ne dit pas que $S(1+x)$ est un logarithme – on a $S(1+x) = \ln(1+x)$ – mais constate que cette surface est en correspondance avec la ligne $1+x$ et affirme (probablement en se basant sur Grégoire de Saint-Vincent) que c'est un logarithme en formulant en notations modernes

$$
S((1+x)(1+y)) = S(1+x) + S(1+y)
$$

et

$$S\left(\frac{1+x}{1+y}\right) = S(1+x) - S(1+y) \ .$$

Il calcule alors les valeurs

$$S(0.8) \quad , \quad S(0.9) \quad , \quad S(1.1) \quad , \quad S(1.2)$$

avec 57 décimales en utilisant $(*)$. En remarquant que

$$2 = \frac{1.2 \cdot 1.2}{0.8 \cdot 0.9} \quad , \quad 3 = \frac{1.2 \cdot 2}{0.8} \quad , \quad 5 = \frac{2 \cdot 2}{0.8} \quad , \quad 10 = 2 \cdot 5$$

$$11 = 10 \cdot 1.1 \quad , \quad 100 = 10 \cdot 10 \ ,$$

il en déduit

$$S(2) = 2S(1.2) - S(0.8) - S(0.9) \ ,$$

puis

$$S(3) \quad , \quad S(5) \quad , \quad S(10) \quad , \quad S(11) \quad , \quad S(100) \ .$$

Il calcule à nouveau à l'aide de $(*)$ les valeurs de

$$S(0.98) \quad , \quad S(0.999) \quad , \quad S(1.02) \quad , \quad S(1.001) \ ,$$

ce qui lui permet d'obtenir

$$S(7) \quad , \quad S(13) \quad , \quad S(17)$$

car

$$7 = \sqrt{\frac{100 \cdot 0.98}{2}} \quad , \quad 13 = \frac{1000 \cdot 1.001}{7 \cdot 11} \quad , \quad 17 = \frac{100 \cdot 1.02}{6} \ .$$

Pour contrôler ses calculs il calcule $S(0.9984)$ d'une part à l'aide de la série $(*)$, puis grâce à

$$0.9984 = \frac{2^8 \cdot 3 \cdot 13}{10^5}$$

et obtient une coïncidence à plus de 50 décimales.

Dans cet ordre d'idées il ne faut pas oublier de citer

Nicolaus Mercator : 1620 - 1687

Les deux premières parties de son livre *Logarithmotechnia* publié en 1668 sont consacrées aux calculs des logarithmes en base 10 avec une très bonne précision.

Dans la troisième partie il découvre sa fameuse série

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots \ .$$

Nous avons vu ci-dessus que Newton l'avait aussi découverte, mais non-publiée. Mercator, comme Newton, débute par la longue division

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \ldots \ ,$$

mais il n'intègre pas terme à terme. Il utilise les idées de Cavalieri, mais ne donne qu'une esquisse de la démonstration. Wallis complète la lacune dans son compte rendu du livre de

Mercator dans les "Philosophical Transactions" en 1668 . En considérant une subdivision de pas infinitésimal $\frac{x}{n}$, i.e. n infiniment grand, de l'intervalle $[0,x]$, on peut écrire

$$S\left(1+x\right) \approx \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1+j\cdot\frac{x}{n}} \cdot \frac{x}{n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x}{n} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(-j\cdot\frac{x}{n}\right)^{l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{n^{l+1}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} j^{l}\right) \cdot \left(-1\right)^{l} \cdot x^{l+1} ,$$

donc

$$S\left(1+x\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \lim\nolimits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{l+1}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^{l}\right) \cdot \left(-1\right)^{l} \cdot x^{l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{l}}{l+1} \cdot x^{l+1} .$$

Il ne faut pas confondre Nicolaus Mercator avec Gerardus Mercator (cf. 2.7).

4.2 La série du binôme

La série du binôme est la première découverte mathématique de Newton. Elle n'a pas été publiée, mais elle fût décrite dans deux lettres célèbres de 1676 qu'il a envoyées à Henry Oldenburg, secrétaire de la "Royal Society of London", pour qu'il la fasse parvenir à Leibniz : la première "epistola prior" est du 3 juin, la seconde "epistola posterior", qui est une réponse à Leibniz, est du 24 octobre.

Etant donnée $P, Q \in \mathbb{R}$ et $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, Newton l'écrit sous la forme

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \ldots \ ,$$

où $A, B, C, \ldots$ désignent successivement le terme précédent de la série. Rappelons que Wallis a introduit les exposants fractionnaire positif et c'est à cette occasion que Newton introduit les exposant négatifs :

> For as analysts, instead of aa , aaa , etc., are accustomed to write a^2 , a^3 , etc., so instead of $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c : a^5}$ (i.e. $\sqrt[3]{a^5}$), etc. I write $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, and instead of $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, I write a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} .

Nous pouvons écrire

$$\Big[P\,(1+Q)\Big]^{\frac{m}{n}} =$$

$$= P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \cdot P^{\frac{m}{n}} \cdot Q + \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m}{n} \cdot P^{\frac{m}{n}} \cdot Q^2 + \frac{m-2n}{3n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m}{n} \cdot P^{\frac{m}{n}} \cdot Q^3 + \ldots =$$

$$= P^{\frac{m}{n}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\frac{m}{n}}{l} \cdot Q^l \ ,$$

avec

$$\binom{\frac{m}{n}}{l} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \ldots \cdot \frac{m-(l-1)\,n}{l \cdot n} = \frac{1}{l!} \cdot \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{m}{n} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{m}{n} - l + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{l!} \cdot \prod_{j=1}^{l} \left(\frac{m}{n} - j + 1\right) \ .$$

Newton cite 9 exemples dont les quatre suivants :

$$\left(c^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^2} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} \mp \ldots$$

$$(d+e)^{\frac{4}{3}} = d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}} \pm \ldots$$

$$\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{d^2} + \frac{e^2}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} \pm \ldots$$

$$(d+e)^{-3} = \frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6e^2}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} \pm \ldots$$

L'interpolation

La manière dont il a fait cette découverte est décrite dans un manuscript non-publié de 1665 . A la place des coefficients

$$a_{\frac{1}{2},\frac{r}{2}} := \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{r}{2}} \, dt$$

introduit par Wallis, il introduit les fonctions

$$f_k\left(x\right) := \int_0^x \left(1-t^2\right)^{\frac{k}{2}} \, dt \ .$$

Il sait que les fonctions d'ordre pair

$$f_{2r}\left(x\right) = \int_0^x \left(1-t^2\right)^r \, dt$$

peuvent être calculées :

$$f_0\left(x\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{1}x\right)$$

$$f_2\left(x\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{1}x\right) + 1\left(-\frac{1}{3}x^3\right)$$

$$f_4\left(x\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{1}x\right) + 2\left(-\frac{1}{3}x^3\right) + 1\left(\frac{1}{5}x^5\right)$$

$$f_6\left(x\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{1}x\right) + 3\left(-\frac{1}{3}x^3\right) + 3\left(\frac{1}{5}x^5\right) + 1\left(-\frac{1}{7}x^7\right)$$

etc... et il remarque que les dénominateurs $1 , 3 , 5 , 7 , \ldots$ sont en progression arithmétique. Il suffit donc de s'intéresser aux numérateurs

$$1 \quad ; \quad 1 , 1 \quad ; \quad 1 , 2 , 1 \quad ; \quad 1 , 3 , 3 , 1 \quad ; \quad \text{etc...},$$

qui sont des coefficients binomiaux, puisque en notations modernes on a

$$f_{2r}\left(x\right) = \int_0^x \left(1-t^2\right)^r \, dt = \int_0^x \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \cdot (-1)^l \cdot t^{2l} \, dt = \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \cdot (-1)^l \cdot \frac{x^{2l+1}}{2l+1} \ .$$

Dans sa lettre "epistola posterior", il parle des coefficients binomiaux comme :

> "these were the figures of powers of the number 11 , namely 11^0 , 11^1 , 11^2 , 11^3 11^4 , that is, first 1 ; then 1 , 1 ; thirdly 1 , 2 , 1 ; fourthly 1 , 3 , 3 , 1 ; fithly 1 , 4 , 6 , 4 , 1 , etc ..."

Son idée est analogue à celle de Wallis et consiste à faire une interpolation dans la table suivante

l \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	□	1	□	1	□	1	□	1
1	0	□	1	□	2	□	3	□	4
2	0	□	0	□	1	□	3	□	6
3	0	□	0	□	0	□	1	□	4
4	0	□	0	□	0	□	0	□	1
5	0	□	0	□	0	□	0	□	0
6	0	□	0	□	0	□	0	□	0

de telle manière que

$$f_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} \cdot (-1)^l \cdot \frac{x^{2l+1}}{2l+1} \ .$$

Pour Newton il est clair que la première ligne doit être complétée par des 1 et la seconde, qui est en progression arithmétique, par $\frac{k}{2}$, i.e.

$$a_{k,0} = 1 \quad \text{et} \quad a_{k,1} = \frac{k}{2} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

On obtient donc la table

l \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
2	0	□	0	□	1	□	3	□	6
3	0	□	0	□	0	□	1	□	4
4	0	□	0	□	0	□	0	□	1
5	0	□	0	□	0	□	0	□	0
6	0	□	0	□	0	□	0	□	0

Mais on a aussi la relation de récurrence pour les coefficients binomiaux

$$a_{k+2,l} = a_{k,l-1} + a_{k,l}$$

(attention les indices sont paires). Newton, grâce à une idée géniale non-explicable ou bien en essayant différentes possibilités, admet que la table entière satisfait encore à cette récurrence, mais seulement ligne par ligne, les coefficients des lignes supérieures dépendant de la ligne choisie. Il considère donc la table des coefficients binomiaux, mais à entrées inconnues

l \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	a	a	a	a	a	a	a	a
1	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$4a+b$	$5a+b$	$6a+b$	$7a+b$
2	c	$b+c$	$a+2b$ $+c$	$3a+3b$ $+c$	$6a+4b$ $+c$	$10a+5b$ $+c$	$15a+6b$ $+c$	$21a+7b$ $+c$
3	d	$c+d$	$b+2c$ $+d$	$a+3b$ $+3c+d$	$4a+6b$ $+4c+d$	$10a+10b$ $+5c+d$	$20a+15b$ $+6c+d$	$35a+21b$ $+7c+d$

et résoud ligne par ligne les équations que l'on obtient en égalant les coefficients d'ordre pair qui sont connus :

Cas $l = 1$: On a $b = 0$ et $2a + b = 1$, donc $a = \frac{1}{2}$ et par suite

$$a+b=\frac{1}{2} \quad , \quad 2a+b=1 \checkmark \quad , \quad 3a+b=\frac{3}{2} \quad , \quad 4a+b=2 \checkmark$$

$$5a+b=\frac{5}{2} \quad , \quad 6a+b=3 \checkmark \quad , \quad \text{etc...}$$

Cas $l = 2$: On a $c = 0$, $a + 2b + c = 0$ et $6a + 4b + c = 1$, donc $a + 2b = 0$ et $6a + 4b = 1$, puis $4a = 1$, d'où l'on tire $a = \frac{1}{4}$, et $b = -\frac{1}{8}$, et par suite

$$b+c=-\frac{1}{8} \quad , \quad a+2b+c=0 \checkmark \quad , \quad 3a+3b+c=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8} \quad , \quad 6a+4b+c=1 \checkmark$$

$$10a+5b+c=\frac{10}{4}-\frac{5}{8}=\frac{15}{8} \quad , \quad 15a+6b+c=\frac{15}{4}-\frac{6}{8}=3 \checkmark$$

$$21a+7b+c=\frac{21}{4}-\frac{7}{8}=\frac{35}{8} \quad , \quad \text{etc...}$$

Cas $l = 3$: On a $d = 0$, $b + 2c + d = 0$, $4a + 6b + 4c + d = 0$ et $20a + 15b + 6c + d = 1$, donc $b + 2c = 0$, $4a + 4b = 0$ et $20a + 12b = 1$, puis $8a = 1$, d'où l'on tire $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{8}$ et $c = \frac{1}{16}$, et par suite

$$c+d=\frac{1}{16} \quad , \quad b+2c+d=0 \checkmark \quad , \quad a+3b+3c+d=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}=-\frac{1}{16} \quad ,$$

$$4a+6b+4c+d=0 \checkmark \quad , \quad 10a+10b+5c+d=\frac{10}{8}-\frac{10}{8}+\frac{5}{16}=\frac{5}{16} \quad ,$$

$$20a+15b+6c+d=1 \checkmark \quad , \quad 35a+21b+7c+d=\frac{35}{8}-\frac{21}{8}+\frac{7}{16}=\frac{35}{16} \quad , \quad \text{etc...}$$

Newton calcule encore les coefficients pour $k = 4, 5, 6$ et il obtient finalement la table

l \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
2	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6
3	0	$\frac{1}{16}$	0	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{5}{16}$	1	$\frac{35}{16}$	4
4	0	$-\frac{5}{128}$	0	$\frac{3}{128}$	0	$-\frac{5}{128}$	0	$\frac{35}{128}$	1
5	0	$\frac{7}{256}$	0	$-\frac{3}{256}$	0	$\frac{3}{256}$	0	$-\frac{7}{256}$	0
6	0	$-\frac{21}{1024}$	0	$\frac{7}{1024}$	0	$-\frac{5}{1024}$	0	$\frac{7}{1024}$	0

Il constate que

$$a_{1,l} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1} \cdot \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\frac{1}{2} - l + 1}{l} \ ,$$

et plus généralement que

$$a_{k,l} = \frac{\frac{k}{2} - 0}{1} \cdot \frac{\frac{k}{2} - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\frac{k}{2} - l + 1}{l}$$

ce que nous notons $\binom{\frac{k}{2}}{l}$, donc que

$$f_k(x) = \int_0^x \left(1 - t^2\right)^{\frac{k}{2}} dt = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\frac{k}{2}}{l} \cdot \frac{(-1)^l}{2l+1} \cdot x^{2l+1} \ .$$

Il constate également que les intégrants

$$\left(1 - x^2\right)^{\frac{0}{2}} \quad , \quad \left(1 - x^2\right)^{\frac{2}{2}} \quad , \quad \left(1 - x^2\right)^{\frac{4}{2}} \quad , \quad \text{etc...}$$

peuvent être interpolés de la même manière que les surfaces (i.e. les intégrales indéfinies) qu'ils définissent en supprimant les dénominateurs $1 , 3 , 5 , 7 , \ldots$ et abaissant le dégré de 1 : c'est la dérivation termes à termes de la série ! Généralisant encore plus il obtient la série du binôme comme décrite au début : en notations modernes, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha - j + 1}{j}$$

et

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k \qquad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[$$

ou bien

$$(x + y)^\alpha = x^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^{\alpha - k} \cdot y^k$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y| < |x|$.

Newton est bien conscient du fait que ce n'est pas une démonstration. Comme première vérification il calcul

$$\left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \ldots\right)^2 =$$

$$= 1 - x^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) x^4 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) x^6 + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{16} - \frac{10}{128}\right) x^8 + \ldots = 1 - x^2 \ ,$$

ainsi que

$$\left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{3}} \right]^3 = \left(1 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{9} x^4 - \frac{5}{81} x^6 - \ldots\right)^3 = \ldots = 1 - x^2 \ .$$

Comme seconde vérification il généralise l'algorithme de Viète pour calculer la racine carrée de $1 - x^2$.

L'algorithme de Viète

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Dans tout livre d'arithmétique ancien on trouve un algorithme dû à Viète pour calculer la racine carrée de a . Si $(a_j)_{j \leqslant 2n+1} \subset \{0, 1, \ldots, 9\}$ est le développement décimal propre de a tel que $10 \cdot a_{2n+1} + a_{2n} \neq 0$, nous devons déterminer la suite $(r_j)_{j \leqslant n} \subset \{0, 1, \ldots, 9\}$ telle que

$$a = a_{2n+1} a_{2n} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} \ldots = \sum_{j=-\infty}^{2n+1} a_j \cdot 10^j = \left(\sum_{j=-\infty}^{n} r_j \cdot 10^j \right)^2 \ .$$

Attention aux sommations décroissantes !

Pour tout $l \leqslant n$ le nombre r_l est tel que

$$\left(\sum_{j=l}^{n} r_j \cdot 10^j \right)^2 \leqslant a \ ,$$

mais c'est aussi le plus grand possible.

En effet dans le cas contraire on aurait

$$\left(\sum_{j=l}^{n} r_j \cdot 10^j + 10^l \right)^2 \leqslant a = \left(\sum_{j=-\infty}^{n} r_j \cdot 10^j \right)^2 \ ,$$

donc

$$2 \cdot \left(\sum_{j=l}^{n} r_j \cdot 10^j \right) \cdot 10^l + 10^{2l} \leqslant 2 \cdot \left(\sum_{j=l}^{n} r_j \cdot 10^j \right) \left(\sum_{j=-\infty}^{l-1} r_j \cdot 10^j \right) + \left(\sum_{j=-\infty}^{l-1} r_j \cdot 10^j \right)^2 <$$

$$< 2 \cdot \left(\sum_{j=l}^{n} r_j \cdot 10^j \right) \cdot 10^l + 10^{2l} \ ,$$

puisque $\sum_{j=-\infty}^{l-1} r_j \cdot 10^j < 10^l$, ce qui est absurde.

Comme

$$(r_n r_{n-1} \ldots r_l)^2 = \left(\sum_{j=l}^{n} r_j \cdot 10^{j-l} \right)^2 \leqslant a \cdot 10^{-2l} = a_{2n+1} a_{2n} \ldots a_{2l+1} a_{2l} , a_{2l-1} \cdots \ ,$$

il est clair que r_n est le plus grand entier dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$ tel que en notation décimale on ait $r_n^2 \leqslant a_{2n+1} a_{2n}$. Pour $l < n$, r_l est le plus grand de ces entiers tel que l'on ait

$$a_{2n+1} a_{2n} \ldots a_{2l+1} a_{2l} \geqslant (r_n r_{n-1} \ldots r_l)^2 = \left[(r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1}) \cdot 10 + r_l \right]^2 =$$

$$= (r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1})^2 \cdot 100 + 2 \cdot (r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1}) \cdot 10 \cdot r_l + r_l^2 \ .$$

On en déduit en particulier la condition nécessaire suivante :

$$\left[a_{2n+1}a_{2n}\ldots a_{2l+3}a_{2l+2} - (r_n \ldots r_{l+1})^2\right] a_{2l+1} \cdot 10 \geqslant 20 \cdot (r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1}) \cdot r_l \ ,$$

c'est-à-dire

$$r_l \leqslant \left\lfloor \frac{\left[a_{2n+1}a_{2n}\ldots a_{2l+3}a_{2l+2} - (r_n \ldots r_{l+1})^2\right] a_{2l+1}}{2 \cdot (r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1})} \right\rfloor \tag{$*$}$$

ce qui justifie l'algorithme suivant :

On choisit tout d'abord r_n le plus grand possible tel que $r_n^2 \leqslant a_{2n+1}a_{2n}$, puis pour $l < n$, on procède comme décrit dans le schéma

$$
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
a_{2n+1}a_{2n} \\
- r_n^2 \\ \hline
\left[a_{2n+1}a_{2n} - r_n^2\right] a_{2n-1}a_{2n-2} \\
\ldots \qquad \vdots \\ \hline
\left[a_{2n+1}a_{2n}\ldots a_{2l+3}a_{2l+2} - (r_n \ldots r_{l+1})^2\right] a_{2l+1}a_{2l} \\
- \left[2 \cdot (r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1})\right] r_l \cdot r_l \\ \hline
a_{2n+1}a_{2n}\ldots a_{2l+1}a_{2l} - (r_n \ldots r_l)^2
\end{array}
&
\begin{array}{l}
r_n \quad \ldots \qquad\qquad\qquad r_{l+1} \\ \hline
\\
\ldots \\
\qquad \begin{array}{r}
\left[2 \cdot (r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1})\right] r_l \\
r_l \\ \hline
\left[2 \cdot (r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1})\right] r_l \cdot r_l
\end{array} \\
\\
\end{array}
\end{array}
$$

en ayant choisi r_l comme dans $(*)$, mais tel que

$$\left[2 \cdot (r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1})\right] r_l \cdot r_l \leqslant \left[a_{2n+1}a_{2n}\ldots a_{2l+3}a_{2l+2} - (r_n \ldots r_{l+1})^2\right] a_{2l+1}a_{2l} \ . \tag{$**$}$$

On peut malheureusement avoir même avoir

$$\left\lfloor \frac{\left[a_{2n+1}a_{2n}\ldots a_{2l+3}a_{2l+2} - (r_n \ldots r_{l+1})^2\right] a_{2l+1}}{2 \cdot (r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1})} \right\rfloor \geqslant 10 \ .$$

On essaye tout d'abord si

$$r_l := \min\left(\left\lfloor \frac{\left[a_{2n+1}a_{2n}\ldots a_{2l+3}a_{2l+2} - (r_n \ldots r_{l+1})^2\right] a_{2l+1}}{2 \cdot (r_n r_{n-1} \ldots r_{l+1})} \right\rfloor , 9 \right) \ .$$

est un bon candidat. Si tel n'est pas le cas il faut essayer avec $r_l - 1$, etc...

Par exemple

12 46 17	3 5 3, 0 1	
9		
3 46		$\left\lfloor \frac{34}{2\cdot 3} \right\rfloor = 5$
	65	
3 25	5	
	325	
21 17		$\left\lfloor \frac{211}{2\cdot 35} \right\rfloor = 3$
	703	
21 09	3	
	2109	
8 00		$\left\lfloor \frac{80}{2\cdot 353} \right\rfloor = 0$
	7060	
0	0	
	0	
8 00 00		$\left\lfloor \frac{8000}{2\cdot 3530} \right\rfloor = 1$
	70601	
7 06 01	1	
	70601	
93 99		

mais

3 02 76	1 7 4	
1		
2 02		$\left\lfloor \frac{20}{2\cdot 1} \right\rfloor = 10$
	29 28 27	
1 89	9 8 7	
	261 244 189	
13 76		$\left\lfloor \frac{137}{2\cdot 17} \right\rfloor = 4$
	344	
13 76	4	
	1376	
0		

Cette méthode d'extraction d'une racine carrée est étroitement liée à celle des approximations successives de Newton que nous décrirons ci-dessous. Rappelons que, sous sa forme moderne, cette méthode consiste à résoudre l'équation $x^2 = a$, i.e $x^2 - a = 0$, en considérant la suite des approximations successives définie par la fonction

$$\Phi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{x^2 + a}{2x} \ .$$

Cette suite est donc donnée par

$$x_{k+1} := \Phi(x_k) = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = x_k + \frac{a - x_k^2}{2x_k} \ .$$

On a le même type de correction comme ci-dessus. Les difficultées rencontrées s'expliquent naturellementet car cette méthode fournit des approximations par dessus. En effet on a

$$\Phi(x)^2 = \left(\frac{x^2 + a}{2x}\right)^2 = a + \left(\frac{x^2 - a}{2x}\right)^2 \geqslant a \ .$$

En outre

$$0 \leqslant \frac{\Phi(x) - \sqrt{a}}{\Phi(x)} \leqslant \left(\frac{x - \sqrt{a}}{x}\right)^2 \quad ,$$

puisque

$$\frac{\Phi(x) - \sqrt{a}}{\Phi(x)} = \frac{x - \sqrt{a} - \frac{x^2 - a}{2x}}{x - \frac{x^2 - a}{2x}} = \frac{x^2 - 2x\sqrt{a} + a}{x^2 + a} \leqslant \left(\frac{x - \sqrt{a}}{x}\right)^2 \quad ,$$

ce qui montre qu'en général on double le nombre de chiffres exacts.

La généralisation de l'algorithme de Viète

Cela revient tout simplement à remplacer le développement décimale d'un nombre par le développement en série entière d'une fonction.

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{ll} 1 & -x^2 \\ -1 & \\ \hline & -x^2 \end{array} & 1 \quad -\frac{x^2}{2} \quad -\frac{x^4}{8} \quad -\frac{x^6}{16} \\
\hline
\end{array}$$

$$\left\lfloor \frac{-x^2}{2\cdot 1} \right\rfloor = -\frac{x^2}{2}$$

$$\begin{array}{r} 2 - \frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^2}{2} \\ \hline -x^2 + \frac{x^4}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2 - \frac{x^4}{4} \\ \hline -\frac{x^4}{4} \end{array}$$

$$\left\lfloor \frac{-\frac{x^4}{4}}{2\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)} \right\rfloor = -\frac{x^4}{8}$$

$$\begin{array}{r} 2\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^4}{8} \\ -\frac{x^4}{8} \\ \hline -\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{8} + \frac{x^8}{64} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{8} - \frac{x^8}{64} \\ \hline -\frac{x^6}{8} - \frac{x^8}{64} \end{array}$$

$$\left\lfloor \frac{-\frac{x^6}{8} - \frac{x^8}{64}}{2\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right)} \right\rfloor = -\frac{x^6}{16}$$

4.3 La résolution des équations par la méthode des approximations successives

En octobre 1666 Newton rassembla les résultats obtenus pendant les deux années précédentes dans un manuscript que l'on a intitulé *The October 1666 Tract on Fluxions* . Remarquons que les résultats de Roberval ne semblent pas connus de Newton, par contre ceux de Descartes et Fermat le sont par l'intermédiaire de Barrow. A la suite de la publication du *Logarithmotechnia* de Mercator en 1668 (cf. 4.1), il rassembla en 1669 ses propres résultats dans *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* . En 1671 il a écrit son chef-d'oeuvre mathématique *De Methodis Serierum et Fluxionum* , dont la première partie est une extension de *De Analysi* , mais encore peu connu à cette époque il eut des difficultés à le publier. Au cours de la même année il se décida de l'incorporer à son traité intitulé *Opticks* . Mais les objections et chicanes qu'on lui fit, évidemment à tort, sur ses principes et ses expériences empêcha également sa publication. Sur les insistances de quelques amis il le publia enfin en 1704 avec en appendice un texte écrit entre 1691 et 1693 exposant de manière très technique son calcul des fluxions arrivé à maturité. Quant à *De Methodis* il ne parut qu'en 1736 en traduction anglaise. J'ai utilisé la traduction française de Buffon [25] publiée en 1740 .

Il commence par rappeler la division des polynômes, mais à partir des petites puissances, donc dans l'espace des séries formelles, puis l'extraction des racines carrées comme nous l'avons vu ci-dessus. Il s'intéresse ensuite à la "réduction des racines des équation à des suites infinies", remarquant que les géomètres ont fourni des méthodes "extrêmement embarrassés et chargées d'opérations superflues" !

EXEMPLE 1 Commençons par décrire la manière dont Newton justifie l'approximation d'une racine carrée : Etant donné une approximation x de $\sqrt{a}$ et si δ désigne l'erreur faite, on a $\sqrt{a} = x + \delta$, donc

$$x^2 + 2x \cdot \delta + \delta^2 = (x + \delta)^2 = a \ .$$

Comme δ est petit, δ^2 est beaucoup plus petit et on a

$$x^2 + 2x \cdot \delta \approx a \ ,$$

donc

$$\delta \approx \frac{a - x^2}{2x}$$

et on obtient une meilleure approximation en prenant

$$x + \frac{a - x^2}{2x} \, !$$

Nour interpréterons cette procédure sous la forme moderne à la suite de l'exemple qui suit.

EXEMPLE 2 Il considère (cf. [25], De la réduction des équations affectées, XX, p. 7) l'équation

$$P(x) = x^3 - 2x - 5 = 0 \ .$$

On a $P(2) = -1$ et $P(3) = 16$, donc P possède un zéro entre 2 et 3 .

Newton commence l'approximation en posant $x_0 := 2$. Il écrit alors $x = x_0 + r = 2 + r$ et obtient comme condition l'équation

$$0 = P(2+r) = (2+r)^3 - 2(2+r) - 5 = r^3 + 6r^2 + 10r - 1 \ .$$

En négligeant les termes non-linéaires, il en déduit que $r \approx 0.1$, donc qu'une meilleure approximation est $x_1 = 2 + 0.1 = 2.1$.

Il procède ensuite de la même manière en posant $x = 2.1 + r$ et obtient

$$0 = P(2.1+r) = (2.1+r)^3 - 9.2 - 2r = 0.061 + 11.23r + 6.3r^2 + r^3 \ ,$$

d'où

$$r \approx -\frac{0.061}{11.23} \approx 0.0054 \ ,$$

donc $x_2 = 2.1 - 0.0054 = 2.094\,6$ et finalement $x = 2.094\,6 + r$, puis

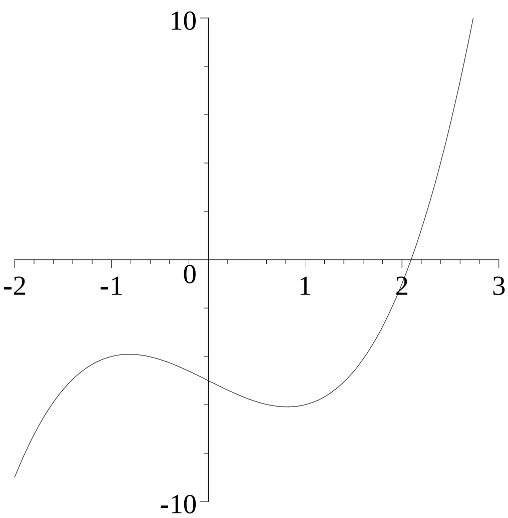
$$0 = P(2.094\,6 + r) \approx 11.162 \cdot r + 0.000\,541\,6 \ ,$$

d'où

$$r \approx -\frac{0.000\,541\,6}{11.162} \approx -0.000\,048\,52 \ ,$$

donc $x_3 = 2.0946 - 0.000\,048\,52 = 2.094\,551\,48$. C'est le résultat de Newton.

Ceci est une bonne approximation de la racine de P qui est $2.094\,551\,482\ldots$.



Que signifie cette procédure ? Si x est une approximation d'une racine ξ de $P = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \mathrm{id}^k$, en posant $\xi = x + r$, on obtient

$$0 = P(\xi) = P(x+r) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x+r)^k = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \left(x^k + k \cdot x^{k-1} \cdot r + \ldots\right) =$$

$$= P(x) + r \cdot P'(x) + \ldots$$

(c'est le développement de Taylor de $P(x + \diamond)$ en 0 !). En négligeant les termes non-linéaires en r , on en déduit que

$$0 \approx P(x) + r \cdot P'(x) \ ,$$

donc

$$r \approx -\frac{P(x)}{P'(x)} ,$$

ce qui montre que la nouvelle approxiamtion $\Phi(x)$ est donnée par

$$\Phi(x) := x + r = x - \frac{P(x)}{P'(x)} .$$

Remarquons que Newton n'a jamais donné cette formulation, ni son interprétation géométrique.

EXEMPLE 3 Plus généralement Newton veut résoudre des équations du type (cf. [25], De la réduction des équations affectées, XXXVI, p. 12)

$$P(x,y) = x^3 + a^2 \cdot x + ay \cdot x - y^3 - 2a^3 = 0$$

en fonction de y , i.e. déterminer la fonction $\xi : y \longmapsto \xi(y)$ sous forme de série telle que

$$P(\xi(y), y) = 0 .$$

Newton commence par expliquer (cf. XXVII à XXXIII, p. 10 à 11) comment il faut déterminer le premier terme de cette série (terme constant en y). Cela revient à négliger tous les termes en y et à résoudre

$$0 = r^3 + a^2 \cdot r - 2a^3$$

dont l'unique solution réelle est $r = a$. Ainsi $\xi_0(y) := a$ est la première approximation.

Etant donné y et en écrivant $\xi(y) = \xi_0(y) + r = a + r$, on a

$$0 = P(\xi(y), y) = P(a+r, y) = (a+r)^3 + a^2 \cdot (a+r) + ay \cdot (a+r) - y^3 - 2a^3 =$$

$$= 4a^2 r + a^2 y + 3ar^2 + ayr + r^3 - y^3 .$$

Sachant que r est de la forme $r = c_1 \cdot y + \ldots$ et en négligeant les termes non-linéaires en y , on obtient

$$0 \approx 4a^2 r + a^2 y ,$$

donc

$$r \approx -\frac{1}{4} y ,$$

ce qui conduit à la seconde approximation

$$\xi_1(y) := a - \frac{1}{4} y .$$

Sachant maintenant que $r = c_2 \cdot y^2 + \ldots$ et en négligeant les termes d'ordre $\geqslant 3$, on est conduit à résoudre

$$0 = P\left(a - \frac{1}{4} y + r, y\right) \approx 4a^2 r - \frac{1}{16} a y^2 ,$$

donc

$$r = \frac{1}{64a} y^2 \quad \text{et} \quad \xi_2(y) := a - \frac{1}{4} y + \frac{1}{64a} y^2 ,$$

puis successivement

$$0 = P\left(a - \frac{1}{4} y + \frac{1}{64a} y^2 + r, y\right) \approx 4a^2 r - \frac{131}{128} y^3 ,$$

donc

$$r = \frac{131}{512a^2}y^3 \quad \text{et} \quad \xi_3(y) := a - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64a}y^2 + \frac{131}{512a^2}y^3 \ ,$$

et finalement

$$0 = P\left(a - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64a}y^2 + \frac{131}{512a^2}y^3 + r, y\right) \approx 4a^2 r - \frac{509}{4096a}y^4 \ ,$$

donc

$$r = \frac{509}{16\,384a^3}y^4 \quad \text{et} \quad \xi_4(y) := a - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64a}y^2 + \frac{131}{512a^2}y^3 + \frac{509}{16\,384a^3}y^4 \ .$$

C'est le résultat de Newton.

Comme vérification on peut calculer

$$P(a, y) = a^2 y - y^3 \ ,$$

$$P\left(a - \frac{1}{4}y, y\right) = -\frac{a}{16}y^2 - \frac{65}{64}y^3 \ ,$$

$$P\left(a - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64a}y^2, y\right) = -\frac{131}{128}y^3 + \frac{15}{4096a}y^4 - \frac{3}{16\,384a^2}y^5 + \frac{1}{262\,144a^3}y^6 \ ,$$

$$P\left(a - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64a}y^2 + \frac{131}{512a^2}y^3, y\right) = -\frac{509}{4096a}y^4 + \ldots$$

et

$$P\left(a - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64a}y^2 + \frac{131}{512a^2}y^3 + \frac{509}{16\,384a^3}y^4, y\right) = \frac{1843}{32\,768a^2}y^5 + \ldots \ .$$

EXEMPLE 4 Comme nous l'avons vu en 4.1 Newton calcule la surface z délimitée par l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{1+x}$ en utilsant la série géométrique et en intégrant termes à termes :

$$z = \int_0^x \frac{1}{1+s}\, ds = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-s)^k \, ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot x^{k+1} =$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \pm \ldots \ .$$

Pour exprimer x en fonction de z il suffit donc de résoudre l'équation

$$P(x, z) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \pm \ldots - z = 0$$

(cf. [25], XXXIX, p. 14).

Le terme constant (en z) s'obtient en résolvant $P(r, 0) = 0$. La première approximation est donc $\xi_0(z) := 0$. Ecrivant $\xi(z) = \xi_0(z) + r = r$, sachant que $r = c_1 \cdot z + \ldots$ et en négligeant tous les termes non-linéaires en z , on a

$$0 = P(r, z) \approx r - z \ ,$$

ce qui fournit la seconde approximation

$$\xi_1(z) = z \ .$$

On est alors conduit à résoudre successivement

$$0 = P\,(z + r, z) = z + r - \frac{1}{2}\,(z + r)^2 \pm \ldots \approx r - \frac{1}{2} z^2 \ ,$$

donc

$$\xi_2\,(z) = z + \frac{1}{2} z^2 \ ,$$

puis

$$0 = P\left(z + \frac{1}{2} z^2 + r, z\right) =$$

$$= z + \frac{1}{2} z^2 + r - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2} z^2 + r\right)^2 + \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{2} z^2 + r\right)^3 \mp \ldots - z \approx$$

$$\approx r - \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{3} z^3 \ ,$$

donc

$$\xi_3\,(z) = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 \ ,$$

puis

$$0 = P\left(z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + r, z\right) =$$

$$= \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + r - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + r\right)^2 + \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + r\right)^3$$

$$-\frac{1}{4}\left(z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + r\right)^4 \pm \ldots \approx$$

$$\approx r - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\right) z^4 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) z^4 - \frac{1}{4} z^4 = r - \frac{1}{24} z^4 \ ,$$

donc

$$\xi_4\,(z) = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4 \ .$$

Puisque $z = \ln(1 + x)$ et connaissant la fonction exponentielle, au contraire de Newton, nous pouvons résoudre facilement : $x = e^z - 1$, donc

$$\xi\,(z) = z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{4!} z^4 + \ldots$$

4.4 Le calcul des fluxions

Une courbe C d'équation $F(x,y) = 0$ est considérée par Newton comme engendrée par le point intersection (x,y) de deux droites en mouvement, la première verticale et la seconde horizontale. Avec nos notations cela revient à considérer un paramétrage

$$(x,y) : J \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto (x(t), y(t))$$

de C . Remarquons que comme tout physicien Newton ne fait pas la distinction entre les variables x, y et les fonctions x, y . Il dit que x, y sont des *fluentes* .

Il considère donc le mouvement de ce point comme la superposition de deux mouvements, l'un horizontal, l'autre vertical, et il accepte que ces mouvements sont déterminés par leur vitesse

$$(\dot{x}, \dot{y}) : J \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \ .$$

D'après la loi du parallélogramme des vitesses, bien connu pour les mouvements à vitesse constante et accepté pour les vitesses instantanées grâce au raisonnement infinitésimal, la vitesse du point intersection (x,y) est $(\dot{x}, \dot{y})$. Il dit que $\dot{x}, \dot{y}$ sont les *fluxions* associées.

Remarquons qu'il n'essaie pas de définir la vitesse à partir du mouvement (x,y) , donc de définir la dérivée $(x,y)'$ de (x,y) comme nous le faisons et de poser $(\dot{x}, \dot{y}) := (x,y)'$. Sa notion de vitesse est intuitivement claire, pour des raisons mécaniques évidemment.

Le problème fondamental est alors de trouver la relation liant les fluxions $\dot{x}, \dot{y}$ aux fluentes x, y .

Newton décrit en général une méthode et l'explicite sur des exemples. C'est le cas pour ce qui suit, que nous présentons sous une forme générale moderne. Nous ne considérons que deux variables, bien qu'il en considère trois, voire plus (cf. exemple 4.4.8.d) !

THEOREME *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(c_{k,l})_{0 \leqslant k+l \leqslant n} \subset \mathbb{R}$. Si x, y sont des fluentes liées par une équation de la forme*

$$F(x,y) = \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} c_{k,l} \cdot x^k \cdot y^l \ .$$

alors les fluxions $(\dot{x}, \dot{y})$ correspondantes satisfont à

$$\sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} \left(\frac{k \cdot \dot{x}}{x} + \frac{l \cdot \dot{y}}{y} \right) \cdot c_{k,l} \cdot x^k \cdot y^l = 0 \ .$$

Cf. [25], Problème I, p. 22 à 26. Dans sa démonstration, Newton précise bien que pendant un temps infinitésimal ε (il écrit o), on peut considérer le mouvement comme essentiellement uniforme, donc à vitesse constante, et par suite que le point (x,y) se trouve après ce temps infinitésimal en $(x + \varepsilon \cdot \dot{x}, y + \varepsilon \cdot \dot{y})$. On a donc

$$\sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} c_{k,l} \cdot (x + \varepsilon \cdot \dot{x})^k \cdot (y + \varepsilon \cdot \dot{y})^l = 0 \ ,$$

et par la formule du binôme on obtient

$$0 = \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} c_{k,l} \cdot x^k \cdot y^l + \varepsilon \cdot \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} c_{k,l} \cdot \left(k \cdot x^{k-1} \cdot \dot{x} \cdot y^l + l \cdot x^k \cdot y^{l-1} \cdot \dot{y} \right) + \varepsilon^2 \cdot R \ ,$$

où R est une somme de termes en x et y . Il argumente ensuite en fait de la même manière que Fermat. Le premier terme est nul, puisque $(x, y) \in C$, on peut donc diviser par ε et $\varepsilon \cdot R$ est infiniment petit, donc peut être négligé ; le deuxième terme doit donc être 0 , d'où le résultat, puisque

$$\sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} c_{k,l} \cdot \left(k \cdot x^{k-1} \cdot y^l \cdot \dot{x} + l \cdot x^k \cdot y^{l-1} \cdot \dot{y}\right) = \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} \left(\frac{k \cdot \dot{x}}{x} + \frac{l \cdot \dot{y}}{y}\right) \cdot c_{k,l} \cdot x^k \cdot y^l \ .$$

□

REMARQUE 1 La pente de la tangente à C en (x, y) est donnée par $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ et on retrouve la règle de Sluze, puisqu'avec les notations de 3.8, on a

$$0 = \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} c_{k,l} \cdot \left(k \cdot x^{k-1} \cdot y^l \cdot \dot{x} + l \cdot x^k \cdot y^{l-1} \cdot \dot{y}\right) = \frac{\widetilde{Q_1}(x, y)}{x} \cdot \dot{x} + \frac{\widetilde{Q_2}(x, y)}{y} \cdot \dot{y} \ .$$

Bien que équivalent à la règle de Sluze, le résultat de Newton est évidemment plus pratique, et aussi plus compréhensible, la relation entre les objets naturels (x, y) et $(\dot{x}, \dot{y})$ étant clairement explicitée. On pourrait penser que Newton se contente d'étudier les polynômes, mais ce n'est pas le cas car il ne voit aucune difficulté à étendre ses résultats aux séries. Nous verrons des applications par la suite.

La méthode de Newton contient en outre, comme nous allons le voir, toutes les règles de dérivation. Mais attention, il ne les a pas formulées !

EXEMPLE 1 Soit $n \in \mathbb{N}$ et considérons la courbe d'équation $y = x^n$, i.e. le graphe de id^n . En l'écrivant sous la forme $y - x^n = 0$ le théorème nous permet d'écrire

$$\left(\frac{0 \cdot \dot{x}}{x} + \frac{1 \cdot \dot{y}}{y}\right) \cdot y - \left(\frac{n \cdot \dot{x}}{x} + \frac{0 \cdot \dot{y}}{y}\right) \cdot x^n = 0 \ ,$$

d'où l'on tire

$$\dot{y} - n \cdot \dot{x} \cdot x^{n-1} = 0 \quad \text{, i.e.} \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = n \cdot x^{n-1} \ .$$

EXEMPLE 2 Plus généralement soient $n \in \mathbb{N}$, $(c_k)_{k=0,\ldots,n} \subset \mathbb{R}$ et $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot x^k$. Si x, z sont des fluentes liées par l'équation $z = P(x)$, alors

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = P'(x) \ ,$$

où $P'(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot c_k \cdot x^{k-1}$.

Puisque $\sum_{k=0}^n c_k \cdot x^k - z = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k \cdot \dot{x}}{x} + \frac{0 \cdot \dot{z}}{z}\right) \cdot c_k \cdot x^k - \left(\frac{0 \cdot \dot{x}}{x} + \frac{1 \cdot \dot{z}}{z}\right) \cdot z = 0 \ ,$$

donc

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \left(\sum_{k=0}^n k \cdot c_k \cdot x^{k-1}\right) \ .$$

□

EXEMPLE 3 Etant donné $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq 0$ et x, y des fluentes telles $y = x^{\frac{m}{n}}$, alors

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} \ .$$

En effet $x^m - y^n = 0$, donc

$$\left(\frac{m \cdot \dot{x}}{x} + \frac{0 \cdot \dot{y}}{y}\right) \cdot x^m - \left(\frac{0 \cdot \dot{x}}{x} + \frac{n \cdot \dot{y}}{y}\right) \cdot y^n = 0 \ ,$$

et par suite

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{m \cdot x^{m-1}}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{\frac{m}{n}(n-1)}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} \ .$$

□

EXEMPLE 4 Soit

$$y = (1 + x^n)^{\frac{3}{2}} \ ,$$

i.e.

$$(1 + x^n)^3 - y^2 = 0 \ .$$

Posons $z = 1 + x^n$, donc $\dot{z} = n \cdot x^{n-1} \cdot \dot{x}$. Il vient alors

$$z^3 - y^2 = 0 \ ,$$

donc

$$3z^2 \cdot \dot{z} - 2y \cdot \dot{y} = 0$$

par la proposition, puis

$$3\,(1 + x^n)^2 \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot \dot{x} - 2y \cdot \dot{y} = 0$$

et par suite

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3n \cdot (1 + x^n)^2 \cdot x^{n-1}}{2y} = \frac{3n \cdot (1 + x^n)^2 \cdot x^{n-1}}{2\,(1 + x^n)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} \cdot (1 + x^n)^{\frac{1}{2}} \cdot n \cdot x^{n-1} \ .$$

Plus généralement avec nos notations nous pouvons formuler la

EXEMPLE 5 (Règle de dérivation des fonctions composées)
Soient f, g des fonctions et x, y des fluentes telles

$$y = f\,(g\,(x)) \ .$$

Nous supposons que les fluxions de $z = g\,(x)$ et $y = f\,(z)$ ont déjà été calculées, ce que nous écrivons sous la forme

$$\dot{z} = g'\,(x) \cdot \dot{x} \quad \text{et} \quad \dot{y} = f'\,(z) \cdot \dot{z} \ .$$

On a alors

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f'\,(g\,(x)) \cdot g'\,(x) \ .$$

EXEMPLE 6 Considérons la courbe d'équation

$$y = P\,(x)^{\frac{m}{n}} \ ,$$

où P est un polynôme. Grâce aux exemples 2 et 3 ci-dessus, on obtient immédiatement

$$\dot{y} = \frac{m}{n} \cdot P(x)^{\frac{m}{n}-1} \cdot P'(x) \cdot \dot{x} \ .$$

On a également

EXEMPLE 7 (Règle du produit) Soit

$$y = P(x) \cdot Q(x) \ ,$$

où P, Q sont des polynômes. Il pose

$$u = P(x) \quad , \text{donc} \quad \dot{u} = P'(x) \cdot \dot{x}$$

et

$$v = Q(x) \quad , \text{donc} \quad \dot{v} = Q'(x) \cdot \dot{x} \ .$$

Mais alors $u \cdot v - y = 0$ et en appliquant le théorème à trois variables il obtient

$$\left(\frac{1 \cdot \dot{u}}{u} + \frac{1 \cdot \dot{v}}{v} + \frac{0 \cdot \dot{y}}{y}\right) \cdot u \cdot v - \left(\frac{0 \cdot \dot{u}}{u} + \frac{0 \cdot \dot{v}}{v} + \frac{1 \cdot \dot{y}}{y}\right) \cdot y = 0 \ ,$$

donc

$$\dot{y} = \dot{u} \cdot v + u \cdot \dot{v}$$

et par suite

$$\dot{y} = P'(x) \cdot \dot{x} \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q'(x) \cdot \dot{x} = \Big[P'(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q'(x)\Big] \cdot \dot{x} \ ,$$

EXEMPLE 8 Pour terminer voici les exemples que Newton calcule explicitement :

(a)

$$x^3 - a \cdot x^2 + a \cdot x \cdot y - y^3 = 0$$

et montre que

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3y^2 - a \cdot x}{3x^2 - 2a \cdot x + a \cdot y} \ .$$

(b)

$$2y^3 + x^2 \cdot y - 2c \cdot y \cdot z + 3y \cdot z^2 - z^3 = 0 \ .$$

(c)

$$y^2 - a^2 - x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = 0 \ .$$

Ici il introduit une nouvelle fluente $z = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ et en appliquant le théorème à l'équation

$$a^2 \cdot x^2 - x^4 - z^2 = 0 \ ,$$

il obtient

$$2a^2 \cdot x \cdot \dot{x} - 4x^3 \cdot \dot{x} - 2z \cdot \dot{z} = 0 \ ,$$

puis

$$\dot{z} = \frac{a^2 \cdot x - 2x^3}{z} \cdot \dot{x} = \frac{a^2 \cdot x - 2x^3}{x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \dot{x} \ .$$

Mais la première équation s'écrit $y^2 - a^2 - z = 0$, donc $2y \cdot \dot{y} - \dot{z} = 0$, ce qui donne

$$2y \cdot \dot{y} = \frac{a^2 \cdot x - 2x^3}{x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \dot{x} \ .$$

(d)

$$x^3 - a \cdot y^2 + \frac{by^3}{a+y} - x^2 \cdot \sqrt{ay + x^2} = 0$$

Ici il introduit deux nouvelles fluentes $z = \frac{by^3}{a+y}$ et $v = x^2 \cdot \sqrt{ay + x^2}$, donc est conduit à l'équation

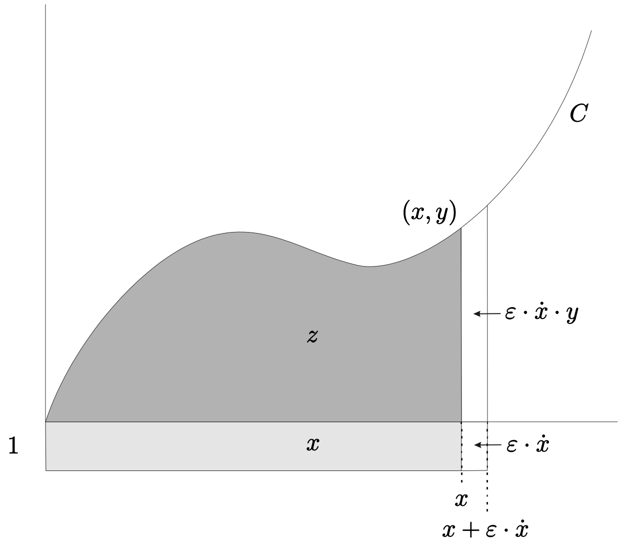
$$x^3 - a \cdot y^2 + z - v = 0$$

à quatre inconnues ; cela qui ne veut pas dire que Newton conçoit un espace à quatre dimensions, mais il en est formellement capable !

4.5 Le théorème fondamental

Soit C une courbe d'équation $F(x,y) = 0$ dans le premier quadrant, qui est le graphe d'une fonction. Remarquons que les courbes de Newton passent toujours par l'origine de son système d'axes ! Il accepte aussi de considérer des courbes où il n'est pas nécessairement posssible de résoudre explicitement par rapport à y en fonction de x . Pour les cas qu'il considère il peut résoudre sous forme de série.

Désignons par z la surface sous C entre 0 et x . Newton représente également x comme la surface d'un rectangle de base x et de hauteur 1 et il considère que ces surfaces sont balayées par un segment vertical se déplaçant à la vitesse $\dot{x}$.



Après un temps infinitésimal ε le point x se trouve en $x + \varepsilon \cdot \dot{x}$ et la surface sous le graphe est essentiellement égale à $z + \varepsilon \cdot \dot{x} \cdot y$. La vitesse associée à z est donc $\dot{z} = \dot{x} \cdot y$. Newton, cf. [25], Préparation pour l'exemple V, p. 24 ou Problème VII, p. 86, constate simplement que les fluxions des surfaces z et x sont entre elles comme les lignes y et 1 qui les ont produites !

THEOREME *Si z désigne la surface sous la courbe C décrite par y entre 0 est x , alors*

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = y \ .$$

REMARQUE Newton suppose en général que $\dot{x} = 1$. Dans ce cas on a $\dot{z} = y$; il a donc démontré avec nos notations modernes, f désignant la fonction dont le graphe est C , que

$$\partial \int_0^{\diamond} f = f \ .$$

4.6 Règle de substitution

Le problème VIII, cf. [25], p. 88 à 91, contient la règle de substitution dans une intégrale, mais aussi sous une forme bien cachée l'intégration par partie.

Etant donné une courbe F d'équation $F(x,y)=0$, z la surface délimitée entre 0 et x et $\dot{x}=1$, le théorème fondamental montre que

$$\dot{z}=y\ . \tag{$*$}$$

Etant donné une équation liant x et une nouvelle variable u (c'est un changement de variable), i.e. $C(x,u)=0$, Newton cherche une autre courbe G d'équation $G(u,v)=0$ telle que la surface w délimitée entre 0 et u soit liée à la surface z et à x,y par une équation $R(z,w,x,y)=0$. On a

$$\dot{w}=v\cdot\dot{u}\ , \tag{$**$}$$

Les relations liant respectivement x,u et z,w permettent de calculer $\dot{w}$ et $\dot{u}$, puis

$$v=\frac{\dot{w}}{\dot{u}}$$

grâce à $(**)$. Utilisant les autres relations on essaye d'exprimer le tout en fonction de u .

Par exemple si l'on veut que les surfaces z et w soient égales, i.e. $R(z,w,x,y)=z-w$, on a $\dot{z}=\dot{w}$, donc

$$v=\frac{\dot{w}}{\dot{u}}=\frac{\dot{z}}{\dot{u}}=\frac{y}{\dot{u}}\ .$$

EXEMPLE 1 Considérons le cercle d'équation $ax-x^2=y^2$, centré en $\left(\frac{a}{2},0\right)$ et passant par $(0,0)$ et $(a,0)$ et le changement de variable $ax=u^2$, i.e. $C(x,u):=ax-u^2=0$. On a donc $a=2u\cdot\dot{u}$ et cherchons la relation entre u et v telle que les surfaces z et w soient égales. Il vient alors $\dot{u}=\frac{a}{2u}$, donc

$$v=\frac{2u\cdot y}{a}\ .$$

Mais

$$y=\sqrt{ax-x^2}=\sqrt{u^2-\frac{u^4}{a^2}}=\frac{u}{a}\cdot\sqrt{a^2-u^2}\ ,$$

donc

$$v=\frac{2u^2}{a^2}\cdot\sqrt{a^2-u^2}\ .$$

Newton a donc montré que

$$\int_0^{\diamond}\sqrt{a\cdot x-x^2}\,dx=\int_0^{\sqrt{a\cdot\diamond}}\frac{2u^2}{a^2}\cdot\sqrt{a^2-u^2}\,du\ .$$

Exprimons ce problème en langage moderne.

Soient f une fonction telle que $\operatorname{Gr} f=F$ et φ une fonction bijective, croissante telle que $\varphi(0)=0$, définissant la substitution $u=\varphi(x)$, donc telle que $C(x,u):=\varphi(x)-u=0$. On cherche une fonction g telle que $\operatorname{Gr} g = G$ et

$$\int_0^{\diamond} f(x)\ dx = z = w = \int_0^{\varphi(\diamond)} g(u)\ du\ .$$

On a donc

$$f(x) = \dot{z} = \dot{w} = v \cdot \dot{u} = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

et par suite

$$g(u) = v = \frac{y}{\dot{u}} = \frac{f\left(\overset{-1}{\varphi}(u)\right)}{\varphi'\left(\overset{-1}{\varphi}(u)\right)}\ .$$

Mais ceci correspond à la formule de substitution

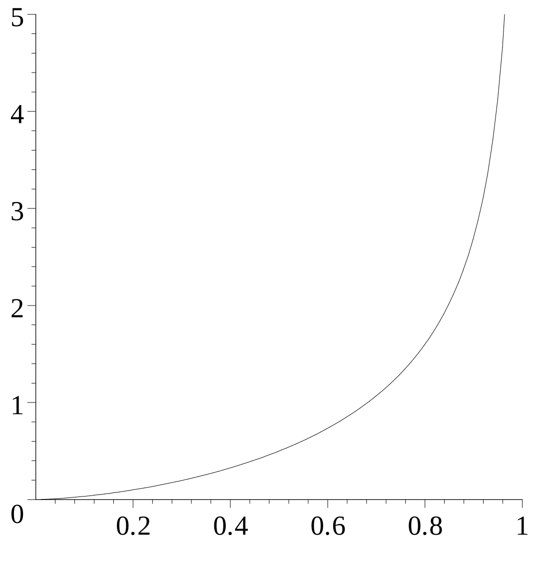
$$\int_0^{\diamond} f(x)\ dx = \int_0^{\varphi(\diamond)} f\left(\overset{-1}{\varphi}(u)\right) \frac{du}{\varphi'\left(\overset{-1}{\varphi}(u)\right)}\ ,$$

puisque $du = \varphi'(x)\ dx$.

EXEMPLE 2 Plus généralement considérons la cissoïde d'équation

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{ax - x^2}}$$

cf. [25], XIII, exemple 4, p. 90.



Le but est de calculer la surface z délimitée par cette courbe entre 0 et x en la ramenant à une surface connue. Newton introduit la relation

$$w = \frac{x}{3}\sqrt{a \cdot x - x^2} + \frac{2}{3} \cdot z$$

entre la surface w associée à la courbe inconnue G et z, x . Par calculer $\dot{w}$ il introduit la nouvelle fluente $h = \frac{x}{3}\sqrt{a \cdot x - x^2}$; on a $w = h + \frac{2}{3} \cdot z$, donc

$$\dot{w} = \dot{h} + \frac{2}{3} \cdot \dot{z} = \dot{h} + \frac{2}{3} \cdot y = \dot{h} + \frac{2x^2}{3\sqrt{ax - x^2}}$$

puisque $\dot{x} = 1$; mais comme $h^2 = \frac{a \cdot x^3 - x^4}{9}$, il vient $2h \cdot \dot{h} = \frac{3a \cdot x^2 - 4x^3}{9}$. On a donc

$$\dot{h} = \frac{3a \cdot x^2 - 4x^3}{6x \cdot \sqrt{a \cdot x - x^2}} = \frac{3a \cdot x - 4x^2}{6\sqrt{a \cdot x - x^2}}$$

et par suite

$$\dot{w} = \frac{3a \cdot x - 4x^2}{6\sqrt{a \cdot x - x^2}} + \frac{2x^2}{3\sqrt{ax - x^2}} = \frac{a \cdot x}{2\sqrt{a \cdot x - x^2}} \ .$$

Newton fait alors le changement de variable $u = \sqrt{a^2 - a \cdot x}$ et obtient $u^2 = a^2 - a \cdot x$, donc $2u \cdot \dot{u} = -a \cdot \dot{x} = -a$. Ainsi $\dot{u} = -\frac{a}{2u}$, d'où il tire

$$v = \frac{\dot{w}}{\dot{u}} = -\frac{a \cdot x}{2\sqrt{a \cdot x - x^2}} \cdot \frac{2u}{a} = -\frac{x \cdot \sqrt{a \cdot (a - x)}}{\sqrt{(a - x)\, x}} = -\sqrt{a \cdot x} = -\sqrt{a^2 - u^2} \ .$$

Au cours de ce calcul il perd le signe $-$! Ceci est bien compréhensible ; puisque ce changement de variable est décroissant, il suffit de retourner le tout.

Pour être tout à fait correct il suffit de faire le changement de variable $u = a - \sqrt{a^2 - a \cdot x}$; on obtient $(a - u)^2 = a^2 - a \cdot x$, donc $(2u - 2a) \cdot \dot{u} = -a \cdot \dot{x} = -a$. Ainsi $\dot{u} = \frac{a}{2(a-u)}$, d'où l'on tire

$$v = \frac{\dot{w}}{\dot{u}} = \frac{a \cdot x}{2\sqrt{a \cdot x - x^2}} \cdot \frac{2\,(a - u)}{a} = \frac{x \cdot \sqrt{a \cdot (a - x)}}{\sqrt{(a - x)\, x}} = \sqrt{a \cdot x} = \sqrt{a^2 - u^2} \ .$$

Remarquons que Newton ne calcul pas w car cette surface est liée au cercle, donc bien connue !

EXEMPLE 3 Quelle est la manière moderne pour calculer la surface délimitée par la cissoïde ? Par exemple en intégrant par partie :

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{at - t^2}}\, dt = \int_0^x \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a - t}}\, dt = \left[-2t^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a - t}\right]_0^x + \int_0^x 3\sqrt{t} \cdot \sqrt{a - t}\, dt =$$

$$= -2x \cdot \sqrt{ax - x^2} + 3 \cdot \int_0^x \sqrt{at - t^2}\, dt \ .$$

Cette manière de faire est aussi citée par Newton comme autre possibilité à la suite de l'exemple précédent (cf. XIV, p. 91). Il introduit la relation

$$w = \frac{2x}{3}\sqrt{ax - x^2} + \frac{1}{3}z \ ,$$

le changement de variable $u = x$ et obtient $v = \sqrt{au - u^2}$!

L'intégrale $\int_0^x \sqrt{at - t^2}\, dt$ peut se calculer en faisant le changement de variable $\sin u = \frac{2}{a}t - 1$, car

$$\sqrt{at - t^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}(\sin u + 1) - \frac{a^2}{4}(\sin u + 1)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\sin^2 u} \ ,$$

et $\cos u \, du = \frac{2}{a} \, dt$, donc

$$\int_0^x \sqrt{at - t^2} \, dt = \frac{a^2}{4} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\left(\frac{2}{a}x-1\right)} \cos^2 u \, du = \frac{a^2}{4} \cdot \left[\frac{1}{2} \cos u \sin u + \frac{1}{2} u\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\left(\frac{2}{a}x-1\right)} =$$

$$= \frac{a^2}{8} \cdot \left(\sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}x - 1\right)^2} \cdot \left(\frac{2}{a}x - 1\right) + \arcsin\left(\frac{2}{a}x - 1\right) + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{ax - x^2} \cdot (2x - a) + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{2}{a}x - 1\right) + \frac{\pi a^2}{4} \right)$$

Ainsi

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{at - t^2}} \, dt =$$

$$= -2x \cdot \sqrt{ax - x^2} + \frac{3}{4} \cdot \left(\sqrt{ax - x^2} \cdot (2x - a) + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{2}{a}x - 1\right) + \frac{\pi a^2}{4} \right) .$$

Maple fournit la primitive suivante

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax - x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} x \sqrt{(ax - x^2)} - \frac{3}{4} a \sqrt{(ax - x^2)} + \frac{3}{8} a^2 \arctan \frac{x - \frac{1}{2}a}{\sqrt{(ax - x^2)}} ,$$

ce qui est correcte car

$$\arcsin\left(\frac{2}{a}x - 1\right) = \arctan \frac{x - \frac{1}{2}a}{\sqrt{ax - x^2}} ,$$

formule que l'on vérifie par dérivation.

EXEMPLE 4 (Intégration par partie) Ce que nous venons de voir montre que Newton, sans l'expliciter, connaissait l'intégration par partie.

Soient f, g des fonctions dérivables et considérons des fluentes x, y telles que

$$y = f(x) \cdot g'(x) .$$

En faisant le changement de variable $u = x$, il suffit alors de déterminer v tel que

$$w = f(x) \cdot g(x) - z .$$

Utilisant la règle du produit (exemple 4.4.7) on obtient

$$\dot{w} = (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) - \dot{z} = (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) - y =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) ,$$

donc

$$v = \frac{\dot{w}}{\dot{u}} = f'(x) \cdot g(x) .$$

Ceci montre évidemment que

$$\int_0^x f' \cdot g = w = f(x) \cdot g(x) - z = f(x) \cdot g(x) - \int_0^x f \cdot g' .$$

EXEMPLE 5 Si $y = \frac{d \cdot x^{n-1}}{e^2+2ef \cdot x^n+f^2 \cdot x^{2n}}$, alors $z = \frac{d \cdot x^n}{n(e^2+ef \cdot x^n)}$ ou $z = \frac{-d}{n \cdot (ef+f^2 \cdot x^n)}$.

En effet, en faisant le changement de variable $u = x^n$, on obtient $du = n \cdot x^{n-1}\, dx$, donc

$$\int \frac{d \cdot x^{n-1}}{e^2 + 2ef \cdot x^n + f^2 \cdot x^{2n}}\, dx = \frac{d}{n} \cdot \int \frac{du}{(e+fu)^2} =$$

$$= -\frac{d}{n \cdot f} \cdot \frac{1}{e + f \cdot u} = -\frac{d}{n \cdot f} \cdot \frac{1}{e + f \cdot x^n} \ .$$

La première solution s'obtient en ajoutant la constante $\frac{d}{n \cdot ef}$:

$$\frac{d}{n \cdot ef} - \frac{d}{n \cdot (ef + f^2 \cdot x^n)} = \frac{d}{n} \cdot \frac{e + f \cdot x^n - e}{ef\,(e + f \cdot x^n)} = \frac{d}{n} \cdot \frac{x^n}{e^2 + ef \cdot x^n} \ .$$

EXEMPLE 6 Si $y = d \cdot x^{2n-1} \cdot \sqrt{e + f \cdot x^n}$, alors $z = \frac{-4e+6f \cdot x^n}{15n \cdot f^2} \cdot (e + f \cdot x^n)^{\frac{3}{2}}$.

En effet, en faisant le changement de variable $u = x^n$, on obtient $du = n \cdot x^{n-1}\, dx$, donc

$$\int d \cdot x^{2n-1} \cdot \sqrt{e + f \cdot x^n}\, dx = d \cdot \int u \cdot \sqrt{e + f \cdot u}\, du =$$

$$= \frac{d}{n} \cdot \left[\frac{2}{3f} \cdot u \cdot (e + f \cdot u)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3f} \cdot \int (e + f \cdot u)^{\frac{3}{2}}\ du\right] =$$

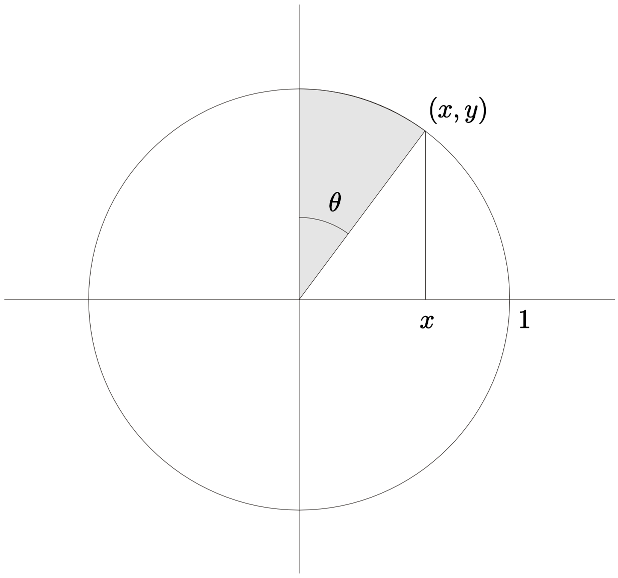
$$= \frac{d}{n} \cdot \left[\frac{2}{3f} \cdot u \cdot (e + f \cdot u)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15f^2} \cdot (e + f \cdot u)^{\frac{5}{2}}\right] =$$

$$= \frac{d}{n} \cdot \frac{10f \cdot u - 4 \cdot (e + f \cdot u)}{15f^2} \cdot (e + f \cdot u)^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{n} \cdot \frac{-4 \cdot e + 6f \cdot u}{15f^2} \cdot (e + f \cdot u)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{d}{n} \cdot \frac{-4 \cdot e + 6f \cdot x^n}{15f^2} \cdot (e + f \cdot x^n)^{\frac{3}{2}} \ .$$

4.7 Le développement en série du sinus

Considérant la figure qui suit Newton constate, en présentation moderne, que



$$\sin\theta = x$$

et

$$\arcsin x = \theta = 2 \cdot \mathrm{Surf}\,(Secteur) =$$

$$= 2 \cdot \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt - x \cdot \sqrt{1-x^2} =$$

$$= 2 \cdot \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot (-1)^k \cdot t^{2k}\,dt - x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot \left(2 \cdot \int_0^x t^{2k}\,dt - x^{2k+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot \left(\frac{2}{2k+1} - 1\right) \cdot x^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot \frac{2k-1}{2k+1} \cdot x^{2k+1} =$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \frac{63}{2816}x^{11} + \ldots$$

en rappelant que

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\frac{1}{2} - j + 1}{j} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} \ .$$

Le développement en série de $\sin \theta$ s'obtient donc en résolvant l'équation

$$\ldots \frac{63}{2816} x^{11} + \frac{35}{1152} x^9 + \frac{5}{112} x^7 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{1}{6} x^3 + x - \theta = 0$$

par la méthode décrite dans le paragraphe 4.3. Newton, probablement enthousiasmé par la beauté du résultat, a calculé cette série jusqu'au terme en θ^{21} !

4.8 Les équations différentielles

Dans [25], Problème II, p. 26, Newton le formule de la manière suivante :

Etant donnée la relation des fluxions, trouver celle des quantités fluentes.

Il décrit tout d'abord le cas, dite solution particulière, où cette équation différentielle s'intègre immédiatement comme par exemple

$$3x^2 \cdot \dot{x} - 2a \cdot x \cdot \dot{x} + a \cdot \dot{x} \cdot y - 3y^2 \cdot \dot{y} + a \cdot x \cdot \dot{y} = 0$$

en divisant chaque terme contenant $\dot{x}$ par $\frac{\dot{x}}{x}$, puis chaque terme contenant x^n par n , et chaque terme contenant $\dot{y}$ par $\frac{\dot{y}}{y}$, puis chaque terme contenant y^m par m , mais en n'écrivant pas deux fois le terme $a \cdot x \cdot y$,

$$x^3 - a \cdot x^2 + a \cdot x \cdot y - y^3 = 0 \ .$$

Il précise bien que toute expression obtenue de cette manière doit être contrôlée par dérivation comme par exemple

$$x \cdot \dot{x} - \dot{x} \cdot y + a \cdot \dot{y} = 0$$

qui fournit

$$\frac{1}{2}x^2 - x \cdot y + a \cdot y = 0\,;$$

mais on en déduit

$$x \cdot \dot{x} - \dot{x} \cdot y - x \cdot \dot{y} + a \cdot \dot{y} = 0$$

qui est différente de l'équation proposée.

Il décrit alors sa solution générale en distinguant trois cas. Le premier est celui des équations qui se ramènent à la forme

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = F(x) \ ,$$

le deuxième à

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = F(x, y)$$

et le troisième des équations contenant trois fluxions ou plus, que l'on ramènent aux cas précédents en introduisant des relations entre les fluentes.

EXEMPLE 1 Comme exemple du premier cas (cf. XIX, p. 30), il considère

$$\dot{y}^2 = \dot{x} \cdot \dot{y} + \dot{x}^2 \cdot x^2$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} + x^2$$

ou bien

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} + x^2 - x^4 + 2x^6 \mp \ldots\right) \ ,$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{1}{2}x \pm \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 \mp \ldots\right) .$$

EXEMPLE 2 Comme premier exemple du deuxième cas (cf. XXXI, p. 33), il considère l'équation

$$a \cdot x \cdot \dot{y} - x \cdot \dot{x} \cdot y - a^2 \cdot \dot{x} = 0$$

qui se met sous la forme

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x} + \frac{y}{a} .$$

Il élimine la singularité en remplaçant x par $b + x$, ce qui revient à résoudre

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b+x} + \frac{y}{a} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b^2}x \pm \ldots + \frac{y}{a} .$$

Il présente alors sa règle générale (cf. XXXIII, p. 34) donnant une solution sous forme de série et remarque un peu plus loin (cf. XXXIX, p. 38) qu'il y a une infinité de solutions, puisqu'on peut donné une valeur initiale à y . Sous forme moderne sa méthode peut se décrire de la manière suivante : Pour résoudre le problème avec condition initiale

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j + \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot x^j\right) \cdot y \quad \text{et} \quad y = \eta \text{ en } x = 0 ,$$

il suffit de remplir successivement le tableau suivant

		a_0	$a_1 \cdot x$	$a_2 \cdot x^2$	$a_3 \cdot x^3$	$\cdots$
$b_0 \cdot y$		$b_0 \cdot c_0$	$b_0 \cdot c_1 \cdot x$	$b_0 \cdot c_2 \cdot x^2$	$b_0 \cdot c_3 \cdot x^3$	$\cdots$
$b_1 \cdot x \cdot y$		0	$b_1 \cdot c_0 \cdot x$	$b_1 \cdot c_1 \cdot x^2$	$b_1 \cdot c_2 \cdot x^3$	$\cdots$
$b_2 \cdot x^2 \cdot y$		0	0	$b_2 \cdot c_0 \cdot x^2$	$b_2 \cdot c_1 \cdot x^3$	$\cdots$
$b_3 \cdot x^3 \cdot y$		0	0	0	$b_3 \cdot c_0 \cdot x^3$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
$\sum$		$a_0 + b_0 \cdot c_0$	$(a_1 + b_0 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_0) \cdot x$	$c_3' \cdot x^2$	$c_4' \cdot x^3$	$\cdots$
$\frac{x}{k+1} \cdot \sum$	$c_0 := \eta$	$c_1 \cdot x$	$c_2 \cdot x^2$	$c_3 \cdot x^3$	$c_4 \cdot x^4$	$\cdots$

Cette méthode est justifiée en faisant l'Ansatz $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k$. On a

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot c_{k+1} \cdot x^k$$

et en substituant il vient

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot c_{k+1} \cdot x^k = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j + \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot x^j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\min(n,k)} b_j \cdot c_{k-j} \right) \cdot x^k ,$$

puis en comparant les termes de même puissance on obtient la relation de récurrence

$$c_{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \left(a_k + \sum_{j=0}^{\min(n,k)} b_j \cdot c_{k-j} \right) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} ,$$

qui n'est rien d'autre que la k-ième colonne.

EXEMPLE 3 Il explicite sa méthode sur l'exemple suivant (cf. XXXIV, p. 34) :

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + x^2 + y + xy \quad \text{et} \quad y = 0 \text{ en } x = 0$$

		1	$-3x$	x^2	0	0	0	0	$\cdots$
y		0	x	$-x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$-\frac{1}{6}x^4$	$\frac{1}{30}x^5$	$-\frac{1}{45}x^6$	$\cdots$
$x \cdot y$		0	0	x^2	$-x^3$	$\frac{1}{3}x^4$	$-\frac{1}{6}x^5$	$\frac{1}{30}x^6$	$\cdots$
0		0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
$\sum$		1	$-2x$	x^2	$-\frac{2}{3}x^3$	$\frac{1}{6}x^4$	$-\frac{2}{15}x^5$	$\frac{1}{90}x^6$	$\cdots$
y	0	x	$-x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$-\frac{1}{6}x^4$	$\frac{1}{30}x^5$	$-\frac{1}{45}x^6$	$\frac{1}{630}x^7$	$\cdots$

,

puis avec la condition initiale $y = 1$ en $x = 0$ (cf. XXXIX, p. 38)

		1	$-3x$	x^2	0	0	0	0	$\cdots$
y		1	$2x$	0	x^3	$\frac{1}{4}x^4$	$\frac{1}{4}x^5$	$\frac{1}{12}x^6$	$\cdots$
$x \cdot y$		0	x	$2x^2$	0	x^4	$\frac{1}{4}x^5$	$\frac{1}{4}x^6$	$\cdots$
0		0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
$\sum$		2	0	$3x^2$	x^3	$\frac{5}{4}x^4$	$\frac{1}{2}x^5$	$\frac{1}{3}x^6$	$\cdots$
y	1	$2x$	0	x^3	$\frac{1}{4}x^4$	$\frac{1}{4}x^5$	$\frac{1}{12}x^6$	$\frac{1}{21}x^7$	$\cdots$

et finalement avec la condition initiale $y = \eta$ en $x = 0$ (cf. XXXIX, p. 39)

		1	$-3x$	x^2	0	$\cdots$
y		η	$(\eta+1)\,x$	$(\eta-1)\,x^2$	$\frac{2\eta+1}{3}x^3$	$\cdots$
$x \cdot y$		0	ηx	$(\eta+1)\,x^2$	$(\eta-1)\,x^3$	$\cdots$
0		0	0	0	0	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
$\sum$		$\eta+1$	$2\,(\eta-1)\,x$	$(2\eta+1)\,x^2$	$\frac{5\eta-2}{3}x^3$	$\cdots$
y	η	$(\eta+1)\,x$	$(\eta-1)\,x^2$	$\frac{2\eta+1}{3}x^3$	$\frac{5\eta-2}{12}x^4$	$\cdots$

.

La solution de ce problème avec condition initiale est

$$y = \left(3\sqrt{2\pi e} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \eta - 4 - 3\sqrt{2\pi e} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x(2+x)} + 4 - x \ ,$$

où

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2}\, dt \ .$$

REMARQUE Newton résoud même des équation différentielles du type

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} \cdot x^l\right) \cdot y^k$$

(cf. XXXV - XXXVII, p. 35 - 37), ainsi que des équations différentielles ayant des puissances fractionnaires (cf. XXXVIII, p. 37 - 38).

EXEMPLE 4 Dans certaines situations avec singularité l'algorithme fonctionne sans faire de translation :

	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	0	0	0	0	$\cdots$
$-\,y$	0	$\frac{1}{x}$		$-a$	ax	$-\frac{1}{2}ax^2$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
$\sum$	$-\frac{1}{x^2}$	0		$-a$	ax	$-\frac{1}{2}ax^2$	$\cdots$
y	$\frac{1}{x}$	0	a	$-ax$	$\frac{1}{2}ax^2$	$-\frac{1}{6}ax^3$	$\cdots$

(cf. XLV, p. 40 et XLIX et L, p. 42 à 43).

EXEMPLE 5 Certaines équation peuvent aussi se résoudre par Ansatz (cf. XLVII et XLVIII, p. 41 à 42). Par exemple

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3y}{4x}$$

se résoud avec l'Ansatz $y = e \cdot x^s$, où e, s sont des constantes inconnues. En substituant dans l'équation différentielle on obtient

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3e \cdot x^s}{4x} = \frac{3e}{4} \cdot x^{s-1} \text{ , donc } y = \frac{3e}{4} \cdot \frac{1}{s} \cdot x^s \ .$$

Mais en comparant il vient

$$e \cdot x^s = \frac{3e}{4} \cdot \frac{1}{s} \cdot x^s \ ,$$

qui montre que e peut être quelconque, mais $s = \frac{3}{4}$.

Pour terminer citons Newton (cf. LVI, p. 45) :

> Le problème est donc résolu, mais la démonstration reste et n'est pas aisée à trouver par la Synthèse ; la matière est trop compliquée et trop variée pour qu'on doive se servir de cette méthode [la synthèse], qui au lieu d'éclaicir jetterait ici de l'obscurité ; ainsi l'on se contentera de l'atteindre par l'Analyse en cherchant tout simplement si de l'équation trouvée on peut revenir à l'équation proposée, ce qui prouvera assez que la méthode est sûre.

4.9 Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force centrale

Nous allons tout d'abord décrire la cinématique d'un point dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine en utilisant les nombres complexes et leur décomposition polaire.

Soit donc

$$\gamma = r \cdot e^{i \cdot \varphi} : J \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \cong \mathbb{C}^* : t \longmapsto \gamma(t) = \gamma_1(t) + i \cdot \gamma_2(t) = r(t) \cdot e^{i \cdot \varphi(t)}$$

et nous supposons que les fonctions $r : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fois continûment dérivables. On en déduit que les fonctions

$$\gamma_1 = r \cdot \cos\varphi \quad \text{et} \quad \gamma_2 = r \cdot \sin\varphi$$

sont aussi deux fois continûment dérivables de J dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 1 Montrer que si γ est deux fois continûment dérivables, alors r et φ sont deux fois continûment dérivables.

Etant donné γ montrer qu'il existe des fonctions r et φ comme ci-dessus.

On a alors

$$\partial\gamma = \partial r \cdot e^{i \cdot \varphi} + i \cdot r \cdot e^{i \cdot \varphi} \cdot \partial\varphi = \partial r \cdot e^{i \cdot \varphi} + r \cdot \partial\varphi \cdot e^{i \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} .$$

Ceci montre que la vitesse est décomposée en une vitesse radiale ∂r et une vitesse orthogonale (tangentielle à un cercle de centre 0 passant par $r \cdot e^{i \cdot \varphi}$) égale à $r \cdot \partial\varphi$.

De même

$$\partial^2\gamma = \partial^2 r \cdot e^{i \cdot \varphi} + 2\partial r \cdot \partial\varphi \cdot e^{i \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} + r \cdot \partial^2\varphi \cdot e^{i \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} + r \cdot (\partial\varphi)^2 \cdot e^{i \cdot (\varphi + \pi)} =$$

$$= \left(\partial^2 r - r \cdot (\partial\varphi)^2\right) \cdot e^{i \cdot \varphi} + \left(r \cdot \partial^2\varphi + 2\partial r \cdot \partial\varphi\right) \cdot e^{i \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} ,$$

ce qui montre que l'accélération est décomposée en une accélération radiale $\partial^2 r - r \cdot (\partial\varphi)^2$ et une accélération orthogonale $r \cdot \partial^2\varphi + 2\partial r \cdot \partial\varphi$.

EXERCICE 2 Interpréter les termes $-r \cdot (\partial\varphi)^2$ et $2\partial r \cdot \partial\varphi$! Pour le premier considérer un point se déplaçant à vitesse angulaire constante θ sur un cercle de rayon R :

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^* : t \longmapsto R \cdot e^{i \cdot \theta \cdot t} .$$

Pour le second considérer un point se déplaçant sur une spirale d'Archimède (cf. 1.10)

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^* : t \longmapsto a \cdot t \cdot e^{ib \cdot t} .$$

Soit maintenant $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une force agissant sur le point matériel de masse m . Nous supposons que cette force est continue et centrale, i.e. que

$$F(x) = -f(|x|) \cdot \frac{x}{|x|} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

ou bien

$$F\left(\rho \cdot e^{i \cdot \theta}\right) = -f(\rho) \cdot e^{i \cdot \theta} ,$$

où $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

La loi du mouvement de Newton nous fournit l'équation différentielle

$$m \cdot \partial^2 \gamma = F \circ \gamma \ ,$$

i.e.

$$m \cdot \left[\left(\partial^2 r - r \cdot (\partial \varphi)^2 \right) \cdot e^{i \cdot \varphi} + \left(r \cdot \partial^2 \varphi + 2 \partial r \cdot \partial \varphi \right) \cdot e^{i \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)} \right] = -f \circ r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

et par suite

$$\partial^2 r - r \cdot (\partial \varphi)^2 = -\frac{1}{m} \cdot f \circ r \tag{$*$}$$

et

$$r \cdot \partial^2 \varphi + 2 \partial r \cdot \partial \varphi = 0 \ . \tag{$**$}$$

Puisque ces équations ne dépendent pas explicitement du temps, nous pouvons effectuer une translation temporelle et supposer que les conditions initiales sont données en $0 \in J$; nous les noterons

$$r(0) \quad , \quad \partial r(0) \quad , \quad \varphi(0) \quad \text{et} \quad \partial \varphi(0) \ .$$

Mais comme ces équations ne dépendent pas non-plus de φ , cela nous permet de translater les valeurs de φ , donc de faire une rotation, et de supposer que

$$\varphi(0) = 0 \ .$$

Globalement ceci revient à se donner

$$\gamma(0) = r(0) \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = \partial r(0) + i \cdot r(0) \cdot \partial \varphi(0) \ .$$

Grâce à $(**)$ on a

$$0 = r^2 \cdot \partial^2 \varphi + 2r \cdot \partial r \cdot \partial \varphi = \partial \left(r^2 \cdot \partial \varphi \right) \ ,$$

donc

$$r^2 \cdot \partial \varphi = r^2(0) \cdot \partial \varphi(0) =: c \ . \tag{$\circledast\circledast$}$$

Cas particulier $\partial \varphi(0) = 0$ C'est celui de la chute d'un corps de masse m dans le champ de force F .

En effet $(\circledast\circledast)$ entraîne $\partial \varphi = 0$, donc $\varphi = \varphi(0)$. L'équation $(*)$ se simplifie donc en

$$\partial^2 r = -\frac{1}{m} \cdot f \circ r$$

et s'intègre en multipliant par ∂r . On obtient

$$\partial \left(\frac{1}{2} \cdot (\partial r)^2 \right) = \partial^2 r \cdot \partial r = -\frac{1}{m} \cdot f \circ r \cdot \partial r = -\frac{1}{m} \cdot \partial (V \circ r) \ ,$$

où $V : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f . On a donc

$$\frac{1}{2} \cdot (\partial r)^2 + \frac{1}{m} \cdot (V \circ r) = \frac{1}{2} \cdot (\partial r(0))^2 + \frac{1}{m} \cdot V(r(0)) =: \frac{1}{m} \cdot E \ ,$$

qui exprime la conservation de l'énergie, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Mais attention il faut choisir V , déterminée à une constante additive près, pour bien définir ce que l'on entend par énergie potentielle. Elle peut très bien être négative comme pour la loi de gravitation universelle de Newton où

$$f(\rho) = \frac{GMm}{\rho^2} \quad \text{et} \quad V(\rho) = -\frac{GMm}{\rho} \ .$$

On en déduit

$$|\partial r| = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{E - V \circ r} \ ,$$

donc

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \cdot t = \int_0^t \frac{|\partial r|}{\sqrt{E - V \circ r}} \ .$$

Remarquons que la quantité $E - V \circ r$ ne dépend pas de la primitive choisie, puisque E en dépend aussi par la même constante additive !

Admettant que f est une fonction strictement positive, donc que $\partial^2 r < 0$, on en déduit que ∂r est strictement décroissante sur J , et par suite s'annule au plus une fois. On en déduit également que V est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\partial r(\tau) = 0$ si, et seulement si, $V \circ r(\tau) = E$.

Si $\partial r(0) \leqslant 0$, alors

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \cdot t = -\int_0^t \frac{\partial r}{\sqrt{E - V \circ r}} = -\int_{r(0)}^{r(t)} \frac{1}{\sqrt{E - V}} \ ,$$

ce qui en principe permet de calculer r , pour autant que l'on puisse calculer la fonction réciproque de $-\int_{r(0)}^{\diamond} \frac{1}{\sqrt{E-V}}$. Puisque pour tout $t \in J \cap \mathbb{R}_+^*$, on a $\partial r(t) < 0$, donc r est strictement décroissante, i.e. le corps tombe et s'écrase en $(0,0)$ au temps

$$T := \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \int_0^{r(0)} \frac{1}{\sqrt{E - V}} \ ,$$

après lequel le problème n'a plus de sens. A première vue on pourrait penser que T ne dépend que de la position au temps 0 et pas de la vitesse initiale ; ce n'est pas le cas car E est d'autant plus grand que la vitesse initiale est plus grande !

Si $\partial r(0) > 0$, il faut d'abord résoudre

$$\partial r = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{E - V \circ r}$$

jusqu'au temps τ : on a

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \int_{r(0)}^{r(\tau)} \frac{1}{\sqrt{E - V}} \ ,$$

puis

$$\partial r = -\sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{E - V \circ r}$$

Pour pouvoir appliquer la théorie de équation différentielles développée dans le cours d'Analyse, chapitre 12, on se ramène à une équation différentielle du premier ordre, mais vectorielle, en introduisant deux nouvelles fonctions s et ψ et deux équations différentielles $s = \partial r$ et

$\psi = \partial\varphi$ (cf. Analyse 12.10), ce qui nous conduit au système

$$\partial \begin{pmatrix} r \\ s \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ r \cdot \psi^2 - \frac{1}{m} \cdot f \circ r \\ \psi \\ -\frac{2}{r} \cdot s \cdot \psi \end{pmatrix}$$

et nous permet d'appliquer le théorème d'unicité (cf. Analyse 12.3). Mais on peut aussi, ce que nous prédecesseurs on fait, discuter ces équations de manière plus subtile. En particulier la seconde équation (⊛⊛) conduit à la

4.10 Deuxième loi de Kepler

Nous sommes dans le

Cas $\partial\varphi(0) \neq 0$

On a donc $r^2 \cdot \partial\varphi = c \neq 0$ partout, ce qui montre que $\partial\varphi$ est de signe constant, donc que φ est strictement monotone et en particulier inversible.

Mais ceci montre également que le point matériel tourne toujours dans le même sens. La surface $S(t)$ balayée entre les temps τ et t est l'image de

$$A(t) := \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid \tau \leqslant s \leqslant t\ ,\ \theta = \varphi(s)\ ,\ 0 < \rho \leqslant r(s)\right\} =$$

$$= \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid \varphi(\tau) \leqslant \theta \leqslant \varphi(t)\ ,\ 0 < \rho \leqslant r\left(\overset{-1}{\varphi}(\theta)\right)\right\}$$

par l'application Φ_2 définissant les coordonnées polaires, mais en comptant les superpositions! La formule de "changement de variables" et le théorème de Fubini montrent alors que

$$S(t) = {}^{"}\int_{\mathbb{R}^2} 1_{\Phi_2(A(t))}\, d\lambda_{\mathbb{R}^2}{}^{"} = {}^{"}\int_{\mathbb{R}^2} 1_{A(t)} \circ \overset{-1}{\Phi}_2\, d\lambda_{\mathbb{R}^2}{}^{"} = \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}} 1_{A(t)} \cdot |\det D\Phi_2|\ d\lambda_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}} 1_{A(t)}(\rho,\theta)\cdot\rho\, d(\rho,\theta) = \int_{\varphi(\tau)}^{\varphi(t)} \left(\int_0^{r\left(\overset{-1}{\varphi}(\theta)\right)} \rho\, d\rho\right) d\theta = \frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi(\tau)}^{\varphi(t)} r^2\left(\overset{-1}{\varphi}(\theta)\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_\tau^t r^2(s)\cdot\partial\varphi(s)\ ds = \frac{c}{2}\cdot(t-\tau)\ ,$$

puisque en posant $s = \overset{-1}{\varphi}(\theta)$, on a $ds = \partial\overset{-1}{\varphi}(\theta)\ d\theta = \frac{d\theta}{\partial\varphi\left(\overset{-1}{\varphi}(\theta)\right)}$, donc $d\theta = \partial\varphi(s)\ ds$. On en déduit

$$\partial S(t) = \frac{c}{2}\ .$$

THEOREME *Les surfaces balayées pendant un même laps de temps sont égales, i.e. le rayon vecteur du point matériel balaye une aire à variation constante.*

Remarquons que ce théorème ne dépend pas de la loi régissant la force centrale.

4.11 Première loi de Kepler

Utilisant (⊛⊛) l'équation différentielle $(*)$ prend la forme

$$\partial^2 r = \frac{c^2}{r^3} - \frac{1}{m} \cdot f \circ r \ . \tag{⊛}$$

Le problème avec deux conditions initiales associé à cette équation différentielle du second ordre possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. Comme ci-dessus on se ramène à une équation différentielle du premier ordre, mais vectorielle, en introduisant une nouvelle fonction s et une seconde équation différentielle $s = \partial r$ (cf. Analyse 12.10), ce qui nous conduit au système

$$\partial \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial r \\ \partial s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \partial^2 r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{c^2}{r^3} - \frac{1}{m} \cdot f \circ r \end{pmatrix}$$

et nous permet d'appliquer le théorème d'unicité (cf. Analyse 12.3).

Soit r une solution. En multipliant par ∂r , on obtient

$$\partial \left(\frac{1}{2} (\partial r)^2 + \frac{c^2}{2r^2} + \frac{1}{m} \cdot V \circ r \right) = 0 \ ,$$

où $V : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f . On a donc

$$(\partial r)^2 + \frac{c^2}{r^2} + \frac{2}{m} \cdot V \circ r = C$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$|\partial r| = \sqrt{C - \frac{c^2}{r^2} - \frac{2}{m} \cdot V \circ r} \ ,$$

qui est une équation différentielle à variables séparées. Son intégration conduit à une équation implicite pour r que l'on ne peut pas en général résoudre explicitement. Connaissant r , on pourrait alors calculer φ à l'aide de (⊛⊛) .

Nous allons maintenant essayer de déterminer l'équation de la courbe $\gamma(J)$ en utilisant les coordonnées polaires. Nous avons déjà utilisé le fait que φ est inversible. Ceci va nous permettre d'éliminer le temps. Nous allons donc étudier la fonction

$$R := r \circ \overset{-1}{\varphi} : \varphi(J) \longrightarrow \mathbb{R} : \theta \longmapsto r\left(\overset{-1}{\varphi}(\theta)\right) \ .$$

Puisque $\varphi(0) = 0$, on a

$$R(0) = r(0)$$

et

$$\partial R(0) = \frac{\partial r(0)}{\partial \varphi(0)} \ .$$

D'autre part $r = R \circ \varphi$ et grâce à (⊛⊛) on obtient

$$\partial r = (\partial R \circ \varphi) \cdot \partial \varphi = \frac{c}{r^2} \cdot (\partial R \circ \varphi) = \left(\frac{c}{R^2} \cdot \partial R \right) \circ \varphi = -\partial \left(\frac{c}{R} \right) \circ \varphi \ ,$$

puis

$$\frac{c^2}{r^3} - \frac{1}{m} \cdot f \circ r = \partial^2 r = -\left[\partial^2 \left(\frac{c}{R} \right) \circ \varphi \right] \cdot \partial \varphi = -\left[\frac{c}{R^2} \cdot \partial^2 \left(\frac{c}{R} \right) \right] \circ \varphi$$

à l'aide de $(\circledast)$. Ainsi

$$\frac{c}{R^2} \cdot \partial^2 \left(\frac{c}{R} \right) = \frac{1}{m} \cdot f \circ R - \frac{c^2}{R^3}$$

ou encore

$$\partial^2 \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{c^2 \cdot m} \cdot R^2 \cdot f \circ R - \frac{1}{R} \ .$$

Cette équation nous conduit naturellement à faire le changement de fonction

$$Q := \frac{1}{R} \ .$$

On a alors

$$Q(0) = \frac{1}{r(0)} \quad \text{et} \quad \partial Q(0) = -\frac{\partial R(0)}{R(0)^2} = -\frac{\partial r(0)}{r(0)^2 \cdot \partial \varphi(0)} = -\frac{\partial r(0)}{c}$$

et

$$\partial^2 Q = \frac{1}{c^2 \cdot m} \cdot \frac{1}{Q^2} \cdot f \circ \frac{1}{Q} - Q \ , \tag{$\odot$}$$

puis comme ci-dessus

$$\partial \left(\frac{1}{2} \cdot (\partial Q)^2 + \frac{1}{2} \cdot Q^2 + \frac{1}{c^2 \cdot m} \cdot V \circ \frac{1}{Q} \right) = 0 \ ,$$

donc

$$(\partial Q)^2 + Q^2 + \frac{2}{c^2 \cdot m} \cdot V \circ \frac{1}{Q} = C$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$. En principe on peut intégrer cette équation différentielle, puisqu'elle est à variables séparées.

Mais étudions le cas qui nous intéresse effectivement, celui de Newton et de sa loi sur l'attraction universelle

$$f(\rho) = \frac{GMm}{\rho^2} \ ,$$

où G est la constante de gravitation, M la masse du Soleil et m celle de la Terre. L'équation $(\odot)$ se simplifie et s'écrit

$$\partial^2 Q + Q = \frac{GM}{c^2} \ . \tag{$\circledcirc$}$$

Faisons l'Ansatz $Q = P \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}} + \frac{GM}{c^2}$. On obtient

$$\partial Q = (\partial P + i \cdot P) \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}} \quad \text{et} \quad \partial^2 Q = \left(\partial^2 P + 2i \cdot \partial P - P \right) \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}} \ .$$

Ainsi Q est solution de $(\odot\odot)$, si, et seulement si, $P := \left(Q - \frac{GM}{c^2} \right) \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}}$ est solution de l'équation

$$\partial^2 P + 2i \cdot \partial P = 0 \ .$$

Mais toutes les solutions de l'équation

$$\partial S + 2i \cdot S = 0$$

sont de la forme

$$S = S(0) \cdot e^{-2i \cdot \mathrm{id}} \ ,$$

donc

$$P = P(0) + \frac{\partial P(0)}{2i} - \frac{\partial P(0)}{2i} \cdot e^{-2i\cdot\mathrm{id}} \ .$$

On en déduit que

$$Q = \left(P(0) + \frac{\partial P(0)}{2i}\right) \cdot e^{i\cdot\mathrm{id}} - \frac{\partial P(0)}{2i} \cdot e^{-i\cdot\mathrm{id}} + \frac{GM}{c^2} \ .$$

Comme

$$Q(0) = P(0) + \frac{GM}{c^2} \quad \text{, i.e.} \quad P(0) = Q(0) - \frac{GM}{c^2} = \frac{1}{r(0)} - \frac{GM}{c^2}$$

et

$$\partial Q(0) = \left(i \cdot P(0) + \frac{\partial P(0)}{2}\right) + \frac{\partial P(0)}{2} = i \cdot P(0) + \partial P(0) =$$

$$= i \cdot \left(\frac{1}{r(0)} - \frac{GM}{c^2}\right) + \partial P(0) \ ,$$

i.e.

$$\frac{\partial P(0)}{2i} = -\frac{\partial r(0)}{2c \cdot i} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r(0)} - \frac{GM}{c^2}\right)$$

on obtient finalement

$$Q = \left[\frac{1}{r(0)} - \frac{GM}{c^2} - \frac{\partial r(0)}{2c \cdot i} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r(0)} - \frac{GM}{c^2}\right)\right] \cdot e^{i\cdot\mathrm{id}}$$

$$+ \left[\frac{\partial r(0)}{2c \cdot i} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r(0)} - \frac{GM}{c^2}\right)\right] \cdot e^{-i\cdot\mathrm{id}} + \frac{GM}{c^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r(0)} - \frac{GM}{c^2} + i \cdot \frac{\partial r(0)}{c}\right] \cdot e^{i\cdot\mathrm{id}} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r(0)} - \frac{GM}{c^2} - i \cdot \frac{\partial r(0)}{c}\right] \cdot e^{-i\cdot\mathrm{id}} + \frac{GM}{c^2} =$$

$$= \frac{GM}{c^2} + \left(\frac{1}{r(0)} - \frac{GM}{c^2}\right) \cdot \cos - \frac{\partial r(0)}{c} \cdot \sin \ ,$$

puisque Q est une fonction réelle. Ainsi

$$R = \frac{1}{\frac{GM}{c^2} + \left(\frac{1}{r(0)} - \frac{GM}{c^2}\right) \cdot \cos - \frac{\partial r(0)}{c} \cdot \sin} =$$

$$= \frac{\frac{c^2}{GM}}{1 - \left(1 - \frac{c^2}{GM \cdot r(0)}\right) \cdot \cos - \frac{c \cdot \partial r(0)}{GM} \cdot \sin}$$

Soit $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right]$ tel que

$$\left(1 - \frac{c^2}{GM \cdot r(0)}\right) \cdot \cos + \frac{c \cdot \partial r(0)}{GM} \cdot \sin =$$

$$= \frac{c}{GM} \cdot \sqrt{\left(\frac{GM}{c} - \frac{c}{r(0)}\right)^2 + \partial r(0)^2} \cdot \cos(\diamond - \alpha) \ .$$

On a donc

$$R = \frac{\frac{c^2}{GM}}{1 - \frac{c}{GM} \cdot \sqrt{\left(\frac{GM}{c} - \frac{c}{r(0)}\right)^2 + \partial r\left(0\right)^2} \cdot \cos\left(\diamond - \alpha\right)} \ ,$$

ce qui montre que l'exencitricité est

$$e = \frac{c}{GM} \cdot \sqrt{\left(\frac{GM}{c} - \frac{c}{r\left(0\right)}\right)^2 + \partial r\left(0\right)^2}$$

et $p = \frac{c^2}{GM}$, i.e.

$$R = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\left(\diamond - \alpha\right)}$$

(cf. 1.11, "La droite directrice").

THEOREME *Un point matériel soumit à une force centrale proportionnelle à l'inverse du carré de la distance décrit une*

$$\begin{array}{ccc} \textit{ellipse} & & e \in [0,1[\\ \textit{parabole} & \textit{si} & e = 1 \\ \textit{hyperbole} & & e \in]0,\infty[\end{array} \ .$$