

Chapitre 3

LES INFINIMENT PETITS ET LA CRÉATION DE L'ANALYSE

Version du 22 juillet 2006

3.1 Képler

Johannes Kepler : 1571 - 1630

Képler ne fut pas seulement un astronome, mais aussi un géomètre et un algébriste de premier ordre. Il fut le trait d'union entre les mathématiciens de la Renaissance, ainsi que ceux du 17^e et 18^e siècle, et

Gérard Desargues : 1593-1662 ,

fondateur de la géométrie projective, par exemple une droite est un cercle ayant son centre à l'infini, et

Galileo Galilée : 1564-1642 ,

fondateur de la physique mathématique.

Képler énonce le principe de continuité ; par exemple la parabole est la limite d'ellipses ou d'hyperboles, et il en est de même des foyers correspondants. Pour la même raison des droites parallèles se coupent à l'infini. Dans son ouvrage *Stereometria* publié en 1615 , il détermine les volumes de certains corps (des tonneaux) et les aires de certaines surfaces au moyen des infiniments petits, au lieu d'employer la méthode d'exhaustion longue et pénible!

Voici comment il justifie sa deuxième loi sur le mouvement des planètes.

Deuxième Loi *Le segment joignant le soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux.*

Il admet que la vitesse de la planète est donnée par la loi

$$|v(t)| = \frac{c}{|r(t)|} ,$$

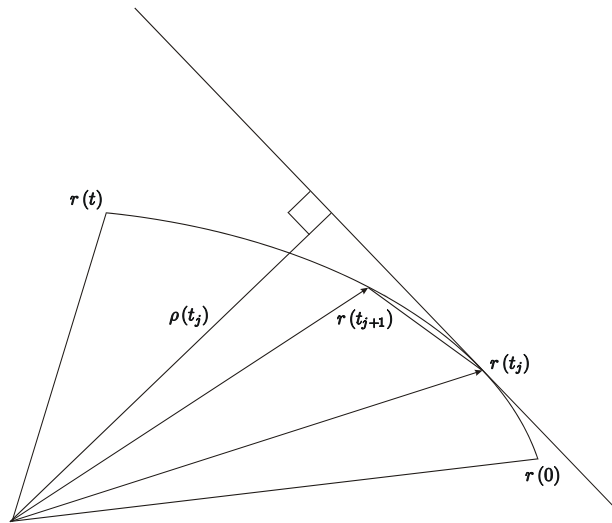
où c est une constante. Soit S_t l'aire balayée entre le temps initial 0 et t et $(t_j)_{j=0,\dots,n}$ est une subdivision infinitésimale de l'intervalle $[0, t]$, i.e. $t_{j+1} - t_j$ est infinitésimal pour tout j , ce qui implique que n est infiniment grand ou encore non-standard dans le langage de l'Analyse non-standard. Il écrit alors

$$t = \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|r(t_{j+1}) - r(t_j)|}{|v(t_j)|} = \frac{1}{c} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} |r(t_j)| \cdot |r(t_{j+1}) - r(t_j)| = \frac{1}{c} \cdot S_t ,$$

mais en commettant la faute suivante (voir la figure qui suit) : la surface du triangle infinitésimal n'est pas égale à $\frac{1}{2} \cdot |r(t_j)| \cdot |r(t_{j+1}) - r(t_j)|$, mais à $\frac{1}{2} \cdot \rho(t_j) \cdot |r(t_{j+1}) - r(t_j)|$, où $\rho(t_j)$ désigne la hauteur de ce triangle, i.e. la distance du soleil à la tangente à l'orbite en $r(t_j)$. Mais cela

se compense exactement avec la vrai loi de la vitesse qui est

$$|v(t)| = \frac{c}{\rho(t)} !$$



3.2 Descartes et la méthode du cercle

René Descartes : 1596 - 1650

Le *Discours de la méthode (pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences)* fut publié en 1637 avec trois appendices, dont *La Géométrie* [7]. Il crée la géométrie analytique, dont le principe fondamental revient à constater, en le formulant sous forme moderne, que tout point du plan est déterminé par ses distances x et y , à deux droites fixes orientées et orthogonales, et qu'une courbe géométrique C du plan peut être complètement caractérisée par une équation $F(x, y) = 0$, i.e.

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0 \} ,$$

l'équation s'obtenant en choisissant une propriété caractéristique géométrique de cette courbe et en l'exprimant sous forme analytique.

Les problèmes que Descartes veut résoudre sont essentiellement liés à l'optique et c'est la droite orthogonale à une certaine courbe et passant par un point donné de cette courbe qu'il veut déterminer. Il n'est donc pas étonnant qu'il ait considéré un cercle plutôt qu'une sécante et que la tangente ne l'intéresse pas (cf. *La Géométrie*, Livre second, p. 32 et ss.).

On considère une courbe C et un cercle K de centre $(t, 0)$ coupant C en (ξ, η) . L'équation du cercle est donc

$$(x - t)^2 + y^2 = (\xi - t)^2 + \eta^2 .$$

La condition d'intersection, i.e. $(x, y) \in K \cap C$, s'écrit donc

$$(x - t)^2 + y^2 - (\xi - t)^2 - \eta^2 = 0$$

et

$$F(x, y) = 0 .$$

La première équation permet d'exprimer y en fonction de x , ou x en fonction de y . En substituant dans la seconde on obtient par exemple l'équation

$$F\left(x, \sqrt{(\xi - t)^2 + \eta^2 - (x - t)^2}\right) = 0 . \quad (*)$$

Il est clair que Descartes ne considère que des courbes algébriques données explicitement et en procédant judicieusement il met (*) sous la forme

$$G(x, t) = 0 , \quad (**)$$

où G est une fonction polynomiale en x et t .

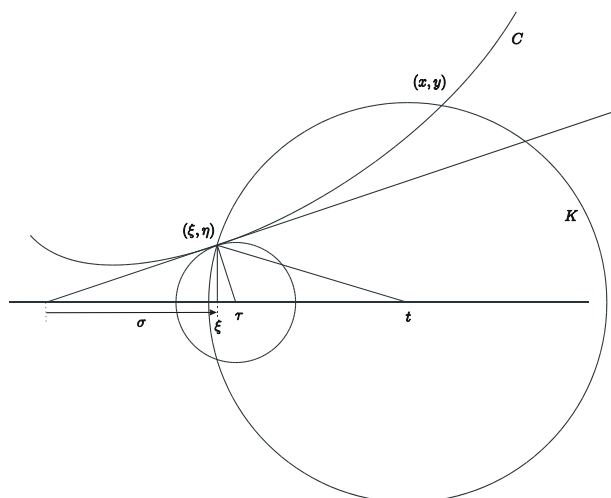
Pour déterminer la droite orthogonale à la courbe $F = 0$, Descartes admet le principe suivant (cf. *La Géométrie*, Livre second, p. 36 et ss.) :

Principe Si ξ est un zéro double de $G(x, \tau)$, i.e

$$G(x, \tau) = (x - \xi)^2 \cdot g(x) , \quad (***)$$

alors le centre $(\tau, 0)$ de ce cercle se trouve sur la droite orthogonale à la courbe C en (ξ, η) .

La fonction g est un polynôme en x et la comparaison des puissances de x dans (***) permet d'éliminer les coefficients de g et de déterminer τ . En termes modernes il nous suffit d'exiger que g est continue en ξ .



Dans les considérations essentiellement géométriques de l'époque, les grandeurs σ , la *sous-tangente*, et $\tau - \xi$, la *sous-normale*, jouaient un grand rôle. Les triangles dont les sommets sont respectivement $(\xi - \sigma, 0)$, $(\xi, 0)$ et (ξ, η) , ainsi que (ξ, η) , $(\xi, 0)$ et $(\tau, 0)$ étant semblables, la pente de la tangente est

$$\frac{\eta}{\sigma} = \frac{\tau - \xi}{\eta}.$$

Mais remarquons que Descartes n'introduit pas ces termes, il ne s'intéresse qu'à τ ! Mais cela ne veut pas dire qu'il ne les connaissaient pas (cf. par exemple la lettre à Fermat du 27 juillet 1638).

EXEMPLE 1 Considérons la courbe d'équation $y = x^2$. L'équation (***) s'écrit

$$(x - \tau)^2 + x^4 - (\xi - \tau)^2 - \xi^4 = (x - \xi)^2 \cdot g(x);$$

puisque g doit être un polynôme du second degré de la forme

$$g(x) = x^2 + b \cdot x + c,$$

en développant et en égalant les coefficients de même puissance, on obtient

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 2\tau \cdot x + \tau^2 - (\xi - \tau)^2 - \xi^4 &= (x^2 - 2\xi \cdot x + \xi^2) \cdot (x^2 + b \cdot x + c) = \\ &= x^4 + (b - 2\xi) \cdot x^3 + (c - 2b \cdot \xi + \xi^2) \cdot x^2 + (-2c \cdot \xi + b \cdot \xi^2) \cdot x + c \cdot \xi^2, \end{aligned}$$

puis en particulier

$$b - 2\xi = 0, \quad c - 2b \cdot \xi + \xi^2 = 1 \quad \text{et} \quad -2c \cdot \xi + b \cdot \xi^2 = -2\tau.$$

On en déduit $b = 2\xi$, donc

$$c = 1 + 2b \cdot \xi - \xi^2 = 1 + 3 \cdot \xi^2,$$

et par suite

$$\tau = c \cdot \xi - \frac{b}{2} \cdot \xi^2 = \xi + 3 \cdot \xi^3 - \xi^3 = \xi + 2 \cdot \xi^3.$$

La pente de la tangente en (ξ, ξ^2) est donc

$$\frac{\tau - \xi}{f(\xi)} = \frac{2 \cdot \xi^3}{\xi^2} = 2 \cdot \xi .$$

EXEMPLE 2 Considérons la courbe d'équation $y^2 = x$. Ici on écrit

$$(x - \tau)^2 + x - (\xi - \tau)^2 - \xi = (x - \xi)^2 \cdot g(x) ,$$

donc g doit être une constante égale à 1. On obtient donc

$$x^2 - 2\tau \cdot x + \tau^2 + x - (\xi - \tau)^2 - \xi = x^2 - 2\xi \cdot x + \xi^2 ,$$

et en particulier

$$1 - 2\tau = -2\xi .$$

La pente de la tangente en $(\xi, \sqrt{\xi})$ est donc

$$\frac{\tau - \xi}{f(\xi)} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\xi}} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} .$$

3.3 Cavalieri

L'usage systématique des infinitésimaux pour le calcul des surfaces et des volumes fut popularisé par les deux livres de

Bonaventura Cavalieri : 1598 - 1647

intitulés *Geometria indivisibilibus* (publié en 1635) et *Exercitationes geometricae sex* (publié en 1647). Il y utilise son *principe de décomposition en tranches*, qui se retrouve aujourd'hui dans le théorème de Fubini. Il obtient en particulier la formule que nous écrivons

$$\int_0^a x^s dx = \frac{a^{s+1}}{s+1} \quad \text{pour } s \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Par analogie avec le résultat correspondant pour deux triangles, il constate, plus qu'il ne démontre, que

THEOREME (de Cavalieri) *Si deux solides ayant la même hauteur ont des sections horizontales à la même hauteur ayant un rapport constant, alors les volumes de ces solides sont dans le même rapport.*

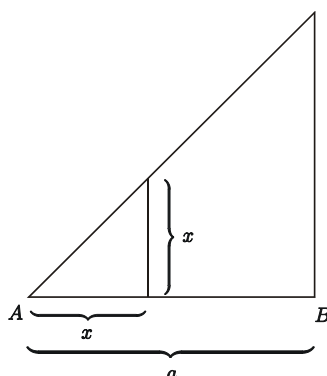
Il considère une surface comme la réunion des sections (des segments) parallèles à une certaine direction la composant et un volume comme la réunion des sections planes parallèles à un certain plan et introduit, sous forme géométrique verbale!, un formalisme disant qu'une surface ou un volume est une somme formelle de ses sections.

Pour un volume P décomposé en tranches suivant la hauteur nous écrivons aujourd'hui

$$\text{Vol}(P) = \int S(h) dh,$$

où $S(h)$ désigne la section de ce volume à la hauteur h .

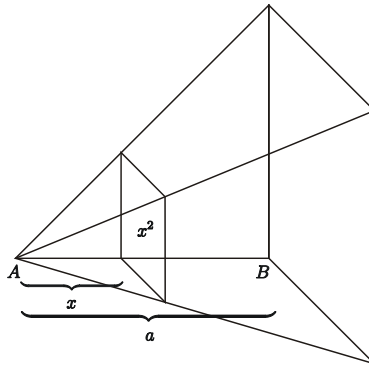
Cavalieri considère donc que la surface du triangle



s'obtient comme une certaine somme formelle des longueurs des lignes verticales formant le triangle, ce que nous écrivons

$$\text{Surf}(Triangle) = \int_A^B x.$$

Il considère de même que le volume de la pyramide

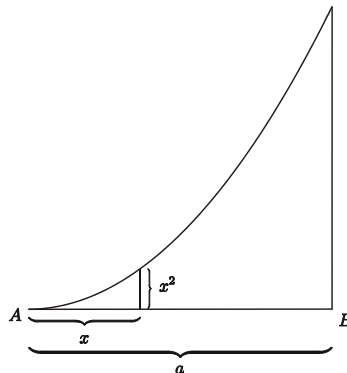


s'obtient comme une certaine somme formelle des aires des sections verticales formant la pyramide, ce que nous écrivons

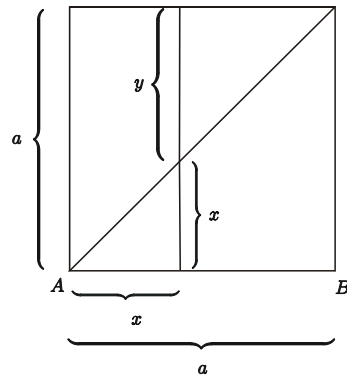
$$\text{Vol}(\text{Pyramide}) = \int_A^B x^2 .$$

Il constate en outre que

$$\int_A^B x^2 = \text{Surf}(\text{Parabole})$$



Mais comme déterminer ces valeurs. Il procède de la manière suivante en considérant tout d'abord la figure suivante



On a

$$a^2 = \text{Surf}(\text{Carré}) = \int_A^B a = \int_A^B (x + y) = \int_A^B x + \int_A^B y = 2 \cdot \int_A^B x$$

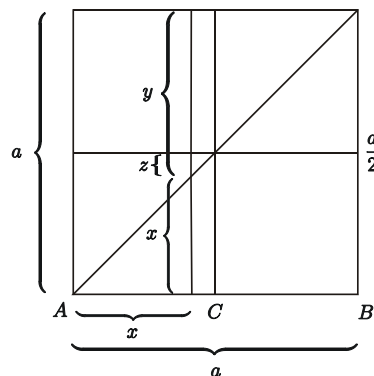
par symétrie, donc

$$\frac{B}{A} S x = \frac{1}{2} \cdot a^2 .$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} a^3 = \text{Vol}(Cube) &= \frac{B}{A} S a^2 = \frac{B}{A} S (x+y)^2 = \frac{B}{A} S x^2 + 2 \cdot \frac{B}{A} S xy + \frac{B}{A} S y^2 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{B}{A} S x^2 + \frac{B}{A} S xy \right) . \end{aligned}$$

Mais en introduisant la grandeur z



on a $x = \frac{a}{2} - z$ et $y = \frac{a}{2} + z$ entre A et C . Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} S xy &= 2 \cdot \frac{C}{A} S xy = 2 \cdot \frac{C}{A} S \left(\frac{a}{2} - z \right) \left(\frac{a}{2} + z \right) = 2 \cdot \frac{C}{A} S \left(\frac{a^2}{4} - z^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{A} S a^2 - 2 \cdot \frac{C}{A} S z^2 = \\ &= \frac{a}{4} \cdot a^3 - 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{B}{A} S x^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(a^3 - \frac{B}{A} S x^2 \right) , \end{aligned}$$

puisque $\frac{C}{A} S z^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{B}{A} S x^2$ par similitude; en notation moderne et grâce au changement de variable $z = \frac{1}{2} \cdot x$, on a

$$\frac{C}{A} S z^2 = \int_0^{\frac{a}{2}} z^2 dz = \int_0^a \frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{8} \cdot \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{B}{A} S x^2 .$$

On en déduit que

$$a^3 = 2 \cdot \left(\frac{B}{A} S x^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(a^3 - \frac{B}{A} S x^2 \right) \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{A} S x^2 + \frac{1}{2} \cdot a^3$$

et par suite

$$\frac{B}{A} S x^2 = \frac{1}{3} \cdot a^3 .$$

Pour calculer $\frac{B}{A} S x^3$ remarquons tout d'abord que

$$\frac{B}{A} S (x^2 y + x y^2) = \frac{B}{A} S (x+y) \cdot xy = a \cdot \frac{B}{A} S xy = \frac{a}{4} \cdot \left(a^3 - \frac{B}{A} S x^2 \right) = \frac{a^4}{6} ,$$

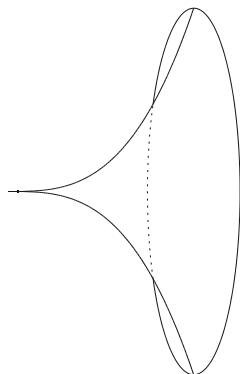
donc

$$a^4 = \frac{B}{A} S a^3 = \frac{B}{A} S (x+y)^3 = \frac{B}{A} S x^3 + 3 \cdot \frac{B}{A} S (x^2 y + x y^2) + \frac{B}{A} S y^3 = 2 \cdot \frac{B}{A} S x^3 + \frac{a^4}{2}$$

et par suite

$$\int_A^B x^3 = \frac{1}{4} \cdot a^4 .$$

Cavalieri poursuit ses calculs jusqu'à $s = 9$ et en infère la formule (*)! Il en déduit la surface délimitée par $x \mapsto x^s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ comme étant égale à $\frac{1}{s+1}$, puis le volume du solide de révolution



engendré par cette surface :

$$\text{Vol}(\text{Solide de révolution}) = \pi \cdot \int_0^1 x^{2s} = \frac{\pi}{2s+1} .$$

3.4 Fermat

Pierre de Fermat : 1601 - 1665

Pratiquement tous les travaux de Fermat n'ont été répandus que par lettres et certains n'ont été publiés la première fois qu'en 1679 par son fils Samuel dans les *Opera varia*. Samuel Fermat a également fait paraître en 1670 une reproduction de l'édition de Diophante publiée avec commentaires par Claude Gaspar Bachet en 1621, mais avec les observations de Fermat, ainsi que certaines lettres et autres textes. Il faut attendre 1891 pour avoir une édition complète des *Oeuvres de Fermat*, publiées par Paul Tannery et Charles Henry (cf. [15] à [19]). J'ai également beaucoup apprécié le livre de Micheal Sean Mahoney [23].

Fermat peut aussi être considéré comme le créateur (avec Descartes) de la géométrie analytique. Son texte *Ad locos planos et solidos* (cf. [15], p. 91 et [17], p. 85) semble même avoir été communiqué avant la publication de la *Géométrie* de Descartes. A mon avis son texte est beaucoup plus clair que celui de Descartes et le système de coordonnées n'est pas nécessairement rectangulaire, mais il utilise les notations de Viète, au contraire de Descartes, qui a pratiquement introduit nos notations modernes, par exemple les exposants.

La recherche des maxima et minima

Nous avons vu (cf. 3.2) que Descartes pouvait déterminer la tangente à n'importe quel courbe dans le plan, donc comprenait implicitement la théorie des maxima et minima.

Fermat a une autre méthode (datant probablement de 1629) et semble comme Oresme, Képler et Cavalieri (voir ci-dessous) accepter l'existence des infiniment petits. Dans le mémoire *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (cf. [15], p. 133 et [17], p. 121), répandu par lettres vers 1638 (cf. la lettre de Descartes à Mersenne du 1^{er} mars 1638), Fermat énonce le principe suivant :

Principe *Si une fonction f atteint en ξ un extremum et si ε est une quantité, alors on adégallera $f(\xi)$ à $f(\xi + \varepsilon)$ (nous écrirons $f(\xi) \simeq$ à $f(\xi + \varepsilon)$), on supprimera les termes communs de part et d'autre, puis en simplifiant par ε ou l'une de ses puissances de telle manière qu'au moins un terme n'ait plus ε en facteur et en supprimant tous les termes contenant encore ε , on obtiendra une équation déterminant ξ .*

Il démontre la puissance de sa méthode sur quelques exemples.

EXEMPLE 1 On veut diviser une droite donnée a en deux segments x et $a - x$ dont le rectangle $x(a - x)$ soit maximum.

Si ξ correspond au maximum et ε est donné, on doit avoir

$$\xi(a - \xi) \simeq (\xi + \varepsilon)(a - \xi - \varepsilon) = \xi(a - \xi) - \xi \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot (a - \xi - \varepsilon),$$

donc

$$0 \simeq -\xi \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot (a - \xi - \varepsilon),$$

puis

$$\xi \simeq a - \xi - \varepsilon ,$$

en ayant divisé par ε , et finalement

$$\xi = a - \xi$$

après avoir supprimé les termes contenant ε . On en déduit évidemment

$$\xi = \frac{a}{2} ,$$

que nous obtenons comme zéro de la dérivée $a - 2x$ de $x(a - x)$!

EXEMPLE 2 C'est une question d'Apollonius, considérée par Pappus comme difficile.

Sur une droite AB , on donne deux points C et D . Il s'agit de diviser CD en un point M , tel que le rapport du rectangle $\frac{AM \cdot MB}{CM \cdot MD}$ soit un minimum.

Posons $a = AC$, $b = CB$, $c = CD$ et $x = CM$. On a donc

$$\frac{AM \cdot MB}{CM \cdot MD} = \frac{(a + x)(b - x)}{x(c - x)}$$

et si ε est donné, on doit avoir

$$\frac{(a + \xi)(b - \xi)}{\xi(c - \xi)} \simeq \frac{(a + \xi + \varepsilon)(b - \xi - \varepsilon)}{(\xi + \varepsilon)(c - \xi - \varepsilon)} .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 0 &\simeq (a + \xi)(b - \xi)(\xi + \varepsilon)(c - \xi - \varepsilon) - (a + \xi + \varepsilon)(b - \xi - \varepsilon)\xi(c - \xi) = \\ &= \varepsilon \cdot \left([c - b + a] \cdot \xi^2 - 2ab \cdot \xi + abc + [-ab + \xi c - \xi b + a\xi] \cdot \varepsilon \right) , \end{aligned}$$

d'où en divisant par ε :

$$0 \simeq [c - b + a] \cdot \xi^2 - 2ab \cdot \xi + abc + [-ab + \xi c - \xi b + a\xi] \cdot \varepsilon$$

puis

$$0 = [c - b + a] \cdot \xi^2 - 2ab \cdot \xi + abc ,$$

ce qui donne deux valeurs pour ξ .

REMARQUE 1 Fermat ne parle pas d'infiniment petits et son *adégalité* ne doit pas être confondue avec l'égalité à un infinitésimal près \approx de l'Analyse non-standard, puisqu'il faut simplifier par ε ou l'une de ses puissances de telle manière qu'au moins un terme n'ait plus ε en facteur, avant d'obtenir l'égalité finale. Il n'a pas justifié sa méthode, mais elle est efficace et meilleure que la méthode du cercle de Descartes. Mais en comparant l'utilisation de l'adégalité dans la théorie des tangentes et des quadratures, je ne peut pas m'imaginer qu'il n'ait pas été en possession, sous une forme peut-être vague, de cette notion d'infiniment petit. D'autre part il est certain qu'il devait connaître les travaux d'Oresme et ceux de Képler. Mais comme élève de l'école que Viète fonda à Bordeaux, il a certainement préféré son principe d'essence algébrique.

Nous pouvons aujourd'hui interpréter son principe sous la forme

Principe non-standard Si une fonction f atteint en ξ un extremum, alors

$$\frac{f(\xi + \varepsilon) - f(\xi)}{\varepsilon} \approx 0 \quad \text{si } \varepsilon \approx 0 , \text{ i.e. } \varepsilon \text{ est infiniment petit.}$$

S'il l'avait effectivement formulé de cette manière, on pourrait le créditer de la découverte du calcul différentiel, puisque $\frac{f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)}{\varepsilon}$ est l'écriture infinitésimale de la dérivée de f en ξ . Mais comme les seules fonctions qu'il pouvait considérer sous forme analytique étaient rationnelles, la division par ε ne posait pas de problème. On voit le contraire dans l'exemple suivant :

EXEMPLE 3 Déterminons le maximum de la fonction $x \mapsto x \cdot e^{-x}$ par la méthode de Fermat. De

$$(\xi + \varepsilon) e^{-(\xi+\varepsilon)} = \xi \cdot e^{-\xi} ,$$

on tire

$$\xi + \varepsilon = \xi \cdot e^\varepsilon$$

et la division par ε n'est possible que sous la forme

$$\frac{1}{\xi} = \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} .$$

Cela revient à connaître la dérivée de la fonction exponentielle en 0. Si Fermat avait connu et su manipuler la série exponentielle il aurait probablement écrit

$$\frac{1}{\xi} \simeq \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^l}{l!} - 1}{\varepsilon} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{l-1}}{l!} = 1 + \varepsilon \cdot \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{l-2}}{l!} ,$$

puis

$$\frac{1}{\xi} = 1 .$$

Nous verrons plus tard comment Newton résoud ce problème.

La tangente à une courbe

Pour déterminer la tangente à une courbe Fermat procède de manière analogue et le démontre aussi sur quelques exemples. On peut décrire sa méthode de la manière suivante en utilisant les infiniments petits :

Soient C une courbe d'équation $F(x, y) = 0$ et $(\xi, \eta) \in C$. Il considère la droite tangente à C en ce point, la sous-tangente σ et ε suffisamment petit pour que le point $(\xi + \varepsilon, \theta)$ sur la tangente puisse être supposé sur la courbe C . Par similitude on a

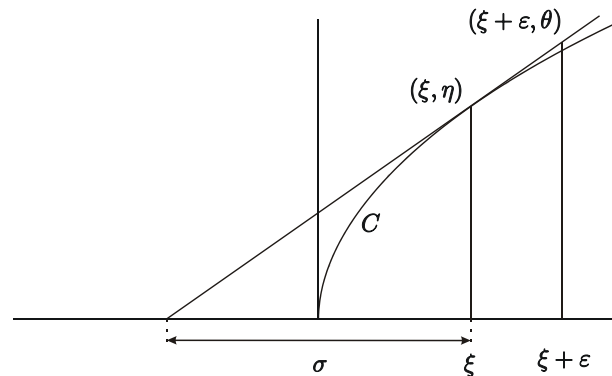
$$\frac{\eta}{\theta} = \frac{\sigma}{\sigma + \varepsilon}$$

et

$$F(\xi, \eta) = 0 \simeq F(\xi + \varepsilon, \theta) .$$

Il élimine η et θ et il lui reste une équation qu'il peut diviser par ε et il suffit d'égaliser à 0 le

terme ne contenant plus ε , ce qui lui permet de déterminer σ en fonction de ξ .



EXEMPLE 4 Considérons une parabole d'équation $y^2 = 2p \cdot x$. On a donc

$$\frac{\eta}{\theta} = \frac{\sigma}{\sigma + \varepsilon}, \quad \eta^2 = 2p \cdot \xi \quad \text{et} \quad \theta^2 = 2p \cdot (\xi + \varepsilon),$$

donc

$$\frac{\xi}{\xi + \varepsilon} = \frac{\sigma^2}{(\sigma + \varepsilon)^2}, \quad \text{i.e.} \quad \xi \cdot (\sigma + \varepsilon)^2 = \sigma^2 \cdot (\xi + \varepsilon),$$

puis

$$2\xi \cdot \sigma \cdot \varepsilon + \xi \cdot \varepsilon^2 = \sigma^2 \cdot \varepsilon$$

et finalement

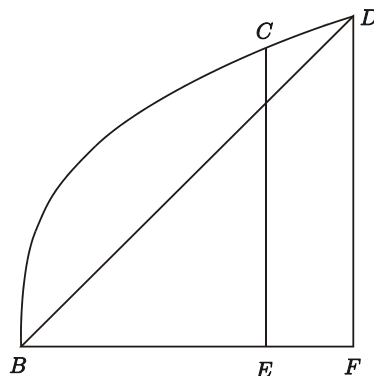
$$2\xi = \sigma.$$

La quadrature des paraboles à puissance entière

Dans sa lettre du 22 septembre 1636 à Roberval, no. 5 (cf. [16], p. 73), Fermat lui pose le problème de la quadrature de la parabole "solide" (cf. 2.6, Viète), dont le cube de l'ordonnée est proportionnelle à l'abscisse, i.e.

$$\frac{FD^3}{EC^3} = \frac{BF}{BE}.$$

Il affirme que le rapport de cette surface $BCDF$ à celle du triangle BDF de même base et même hauteur est sesquialtère, i.e. $\frac{3}{2}$,



et qu'il a été obligé de changer la méthode d'Archimède (cf. 1.8). Roberval dans sa réponse du 11 octobre 1636, no. 7, écrit (cf. [16], p. 81) :

Et je me trompe fort si je n'ai rencontré le même moyen que vous, me servant de lignes parallèles à l'axe et des portions de ces lignes prises entre les paraboles et la ligne qui touche les mêmes paraboles par le sommet, lesquelles portions se suivant en la raison de l'ordre naturel des nombres quarrés ou des nombres cubes etc. Or la somme des quarrés est toujours plus que le tiers du cube qui a pour côté le côté du plus grand carré, et la même somme des quarrés, le plus grand étant ôté, est moindre que le tiers du même cube; la somme des cubes plus que le quart du quarréquarré et, le plus grand cube ôté, moins que le quart; etc.

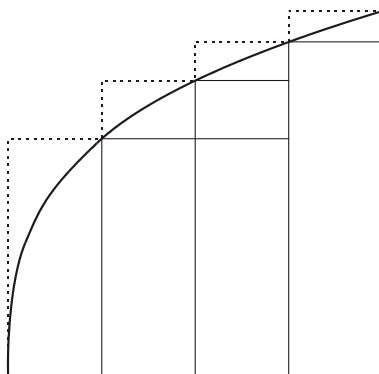
En termes modernes les inégalités décrites par Roberval sont

$$\sum_{k=1}^n k^2 > \frac{n^3}{3} > \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^3 > \frac{n^4}{4} > \sum_{k=1}^{n-1} k^3 ,$$

etc...

Décrivons maintenant leur méthode de manière un peu plus moderne. Ils utilisent la méthode d'Archimède, mais en remplaçant la méthode d'exhaustion par les infiniment petits. Introduisons la subdivision infinitésimale $(k \cdot \frac{a}{n})_{k=0, \dots, n}$ de l'intervalle $[0, a]$; n est donc infiniment grand. En considérant ce que nous appelons maintenant les sommes de Darboux supérieure et inférieure

$$\overline{S}_n := \sum_{k=1}^n \left(k \cdot \frac{a}{n}\right)^s \cdot \frac{a}{n} \quad \text{et} \quad \underline{S}_n := \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \cdot \frac{a}{n}\right)^s \cdot \frac{a}{n}$$



on a

$$\left(\frac{a}{n}\right)^{s+1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^s \leq \int_0^a x^s dx \leq \left(\frac{a}{n}\right)^{s+1} \cdot \sum_{k=1}^n k^s .$$

Mais comme

$$\left(\frac{a}{n}\right)^{s+1} \cdot \sum_{k=1}^n k^s = \left(\frac{a}{n}\right)^{s+1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^s + \frac{a^{s+1}}{n} = \left(\frac{a}{n}\right)^{s+1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^s$$

puisque n est infiniment grand, on obtient

$$\int_0^a x^s dx = \left(\frac{a}{n}\right)^{s+1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^s ,$$

i.e.

$$\int_0^a x^s dx = a^{s+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{s+1}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^s$$

en notations modernes. Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{s+1}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^s = \frac{1}{s+1}, \tag{*}$$

qui découle des inégalités citées par Roberval

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^s < \frac{n^{s+1}}{s+1} < \sum_{k=1}^n k^s. \tag{**}$$

Pour une démonstration moderne voir ci-dessous.

Dans sa réponse à Roberval (lettre du 4 novembre 1636, no. 3, [16], p. 84), Fermat doute qu'il en ait une démonstration valable pour tout s , car il est nécessaire, dit-il, de connaître les sommes $\sum_{k=1}^n k^s$. Il cite alors le résultat suivant :

$$5 \cdot \sum_{l=1}^n l^4 = (4n+2) \cdot \left(\sum_{l=1}^n l \right)^2 - \sum_{l=1}^n l^2.$$

Ce résultat se trouve aussi dans la lettre à Mersenne, septembre ou octobre 1636, no. 11, [16], p. 69 ou [17], p. 291. Dans cette même lettre, no. 7, p. 67 ou resp. p. 289, on trouve aussi la formule suivante :

$$\sum_{l=1}^n l^3 = \left(\sum_{l=1}^n l \right)^2.$$

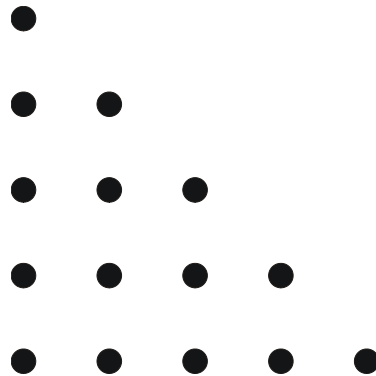
Au no. 12, p. 70 ou resp. p. 291, ainsi que dans ses commentaires sur Diophante (cf. [15], no. XLVI, p. 341 ou [17], no. 46, p. 273), il cite la règle de formation de ce que maintenant nous appelons les *nombre figurés* d'ordre k : c'est une suite de nombres $(P_k(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie récursivement de la manière suivante :

Les entiers naturels ≥ 1 :

$$P_1(n) = n \quad : \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

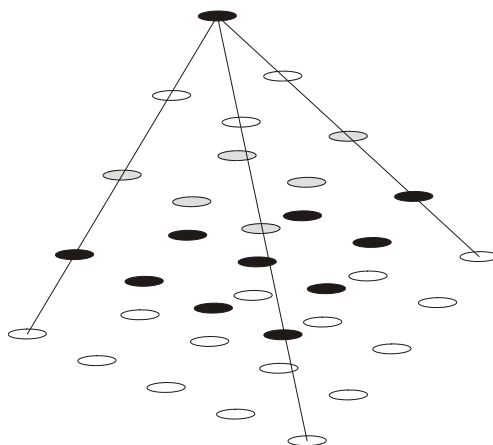
Les nombres triangulaires :

$$P_2(n) := \sum_{l=1}^n P_1(l) = \sum_{l=1}^n l = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad : \quad 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$$



Les nombres pyramidaux :

$$P_3(n) := \sum_{l=1}^n P_2(l) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} \quad : \quad 1, 4, 10, 20, 35, 56, \dots$$



Les nombres figurés d'ordre k :

$$P_k(n) := \sum_{l=1}^n P_{k-1}(l) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* .$$

On obtient la table

$$(P_k(n))_{k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \dots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & \dots \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} ,$$

en ayant introduit la suite constante $(P_0(n))_{n \in \mathbb{N}^*} = (1)$.

Il énonce alors la règle générale suivante

$$k \cdot P_k(n) = n \cdot P_{k-1}(n+1) ,$$

donc

$$P_k(n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!}$$

par récurrence et on a

$$P_{k+1}(n+1) = \sum_{l=1}^n P_k(l) + P_k(n+1) = P_{k+1}(n) + P_k(n+1) ,$$

qui fait penser à la règle des coefficients binomiaux. Ce n'est pas étonnant puisque

$$P_k(n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

et on reconnaît les coefficients binomiaux sur les contre-diagonales de la table ci-dessus.

REMARQUE 2 Calculons $\sum_{l=1}^n l^s$ pour $s = 2, 3, 4$.

Cas $s = 2$ On a

$$\frac{n+2}{3} \cdot \sum_{l=1}^n l = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3!} = P_3(n) = \sum_{l=1}^n P_2(l) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{l=1}^n l \cdot (l+1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l \right),$$

donc

$$\sum_{l=1}^n l^2 = \frac{2 \cdot (n+2) - 3}{3} \cdot \sum_{l=1}^n l = \frac{2n+1}{3} \cdot \sum_{l=1}^n l,$$

formule que Fermat a certainement utilisée. Sous forme développée on a

$$\sum_{l=1}^n l^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Rappelons que Archimède connaissait cette formule sous la forme

$$n^3 + n^2 + \sum_{l=1}^n l = 3 \cdot \sum_{l=1}^n l^2$$

(cf. lemme 1.10).

Cas $s = 3$ On a

$$\begin{aligned} \frac{(n+2) \cdot (n+3)}{3 \cdot 4} \cdot \sum_{l=1}^n l &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4!} = P_4(n) = \sum_{l=1}^n P_3(l) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sum_{l=1}^n l \cdot (l+1) \cdot (l+2) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{l=1}^n (l^3 + 3l^2 + 2l), \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sum_{l=1}^n (l^3 + 3l \cdot (l+1) - l) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{l=1}^n l^3 + \left(\frac{n+2}{3} - \frac{1}{6} \right) \cdot \sum_{l=1}^n l \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{l=1}^n l^3 = \frac{1}{2} \cdot \left((n+2) \cdot (n+3) - 2 \cdot (2n+3) \right) \cdot \sum_{l=1}^n l = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \sum_{l=1}^n l = \left(\sum_{l=1}^n l \right)^2$$

ou bien

$$\sum_{l=1}^n l^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2.$$

Cas $s = 4$ On a

$$\begin{aligned} \frac{(n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \sum_{l=1}^n l &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5!} = P_5(n) = \\ &= \sum_{l=1}^n P_4(l) = \frac{1}{4!} \cdot \sum_{l=1}^n l \cdot (l+1) \cdot (l+2) \cdot (l+3) = \frac{1}{4!} \cdot \sum_{l=1}^n (l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 5 \cdot \sum_{l=1}^n l^4 &= \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{6} \cdot \left(6(n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) - 45 \cdot n \cdot (n+1) - 55 \cdot (2n+1) - 90 \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{6},$$

qu'il faut comparer avec la formule de Fermat

$$\begin{aligned} 5 \cdot \sum_{l=1}^n l^4 &= (4n+2) \cdot \left(\sum_{l=1}^n l \right)^2 - \sum_{l=1}^n l^2 = \frac{(2n+1) \cdot n^2 \cdot (n+1)^2}{2} - \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n \cdot (n+1) - 1)}{6} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{6}; \end{aligned}$$

ceci ne nous montre malheureusement pas, au contraire du cas $s = 3$, comment Fermat a peut-être trouvé cette formule!

Démonstration des inégalité de Fermat-Roberval

Nous allons démontrer les inégalités

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^s < \frac{n^{s+1}}{s+1} < \sum_{k=1}^n k^s$$

par récurrence sur n . Pour $n = 1$, on a évidemment

$$\sum_{k=1}^0 k^s = 0 < \frac{1^{s+1}}{s+1} < 1 = \sum_{k=1}^1 k^s.$$

Pour $n \geq 1$, il vient alors

$$\sum_{k=1}^n k^s = \sum_{k=1}^{n-1} k^s + n^s < \frac{n^{s+1}}{s+1} + n^s \leq \frac{(n+1)^{s+1}}{s+1},$$

puisque

$$(n+1)^{s+1} = \sum_{j=0}^{s+1} \binom{s+1}{j} \cdot n^{s+1-j} \geq n^{s+1} + (s+1) \cdot n^s.$$

C'est la première inégalité. Pour la seconde il vient

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^s = \sum_{k=1}^n k^s + (n+1)^s > \frac{n^{s+1}}{s+1} + (n+1)^s \geq \frac{(n+1)^{s+1}}{s+1},$$

puisque

$$\begin{aligned} n^{s+1} + (s+1) \cdot (n+1)^s - (n+1)^{s+1} &= n^{s+1} + (n+1)^s \cdot (s-n) \geq \\ &\geq n^{s+1} + (n^s + s \cdot n^{s-1}) \cdot (s-n) = s^2 \cdot n^{s-1} \geq 0. \end{aligned}$$

On peut se demander si Fermat a fait une démonstration analogue. Sa prédilection pour les nombres figurés semble dire le contraire. Il a peut-être argumenté comme ci-dessous. Quant à Roberval aucune source nous permet de conclure.

Pour une démonstration directe de (*), il suffit de constater que

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+s)}{(s+1)!} = P_{s+1}(n) = \sum_{k=1}^n P_s(k) = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot (k+1) \cdot \dots \cdot (k+s-1)}{s!} =$$

$$= \frac{1}{s!} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^s c_{s,j} \cdot k^j \right) = \frac{1}{s!} \cdot \sum_{j=0}^s c_{s,j} \cdot \left(\sum_{k=1}^n k^j \right),$$

donc

$$\sum_{k=1}^n k^s = \frac{n \cdot (n+1) \cdots (n+s)}{s+1} - \sum_{j=0}^{s-1} c_{s,j} \cdot \left(\sum_{k=1}^n k^j \right)$$

et par suite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{s+1}} \cdot \sum_{k=1}^n k^s &= \frac{1}{s+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdots (n+s)}{n \cdot n \cdots n} - \sum_{j=0}^{s-1} c_{s,j} \cdot \sum_{k=1}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^j}{n^{s+1}} = \\ &= \frac{1}{s+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdots \left(1 + \frac{s}{n} \right) = \frac{1}{s+1}, \end{aligned}$$

puisque $0 \leq \frac{k^j}{n^{s+1}} \leq \frac{1}{n}$.

□

Pascal

Blaise Pascal : 1623 - 1662

s'est aussi intéressé à la quadrature des paraboles et utilise la formule explicite

$$\sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \cdot \sum_{l=1}^n l^j = (n+1)^{k+1} - n - 1$$

démontrée en 1654.

C'est immédiat par la formule du binôme puisque

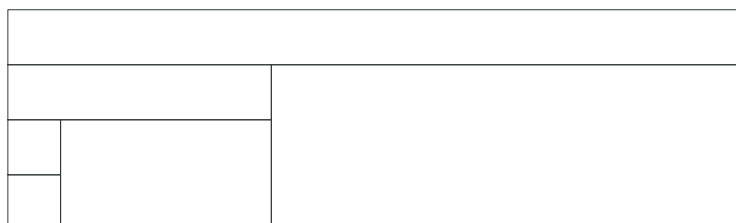
$$\begin{aligned} (n+1)^{k+1} - 1 &= \sum_{l=1}^n \left((l+1)^{k+1} - l^{k+1} \right) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \cdot l^j - l^{k+1} \right) = \\ &= n + \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \cdot \sum_{l=1}^n l^j. \end{aligned}$$

□

EXERCICE (Al-Haitham : 965 ? - 1039 ?) Montrer géométriquement, pour tout $s, n \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$(n+1) \cdot \sum_{k=1}^n k^s = \sum_{k=1}^n k^{s+1} + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^l k^s \right)$$

en considérant la figure suivante :



On a porté successivement k^s sur l'axe des x et 1 sur l'axe des y pour $k = 1, 2, 3$ et $s = 2$.

- (a) Calculer $\sum_{k=1}^n k^4$.
- (b) Démontrer analytiquement cette égalité sans récurrence en s'inspirant de l'idée géométrique.

La quadrature des hyperboles et paraboles généralisées

Le problème de l'intégration des puissances quelconque

$$\text{id}^s : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto x^s ,$$

pour $s \in \mathbb{R}$, est traité par Fermat dans son texte "Méthodes de quadrature", dont le titre complet en français est

Sur la transformation et la simplification des équations de lieux,
pour la comparaison sous toutes les formes
des aires curvilignes, soit entre elles, soit avec les rectilignes,
et en même temps,
sur l'emploi de la progression géométrique
pour la quadrature des paraboles et hyperboles à l'infini.

(cf. [15], p. 255 et ss. et [17], p. 216 et ss.).

Fermat commence par rappeler qu'Archimède n'a employé la progression géométrique que pour la quadrature de la parabole (cf. 1.8); pour d'autres cas il n'a utilisé que la progression arithmétique.

Toutes l'étude de Fermat repose sur une propriété de la progression géométrique formulée de la manière suivante :

Etant donné une progression géométrique dont les termes décroissent indéfiniment, la différence de deux termes consécutifs de cette progression est au plus petit comme le plus grand de tous les termes de cette progression est à la somme de tous les **autres** termes jusqu'à l'infini.

En notations modernes :

THEOREME Si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une progression géométrique, i.e.

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_k}{x_{k+1}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} ,$$

et si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est indéfiniment décroissante, i.e. $x_k > x_{k+1}$, alors

$$\frac{x_0 - x_1}{x_1} = \frac{x_k - x_{k+1}}{x_{k+1}} = \frac{x_0}{\sum_{k=1}^{\infty} x_k} .$$

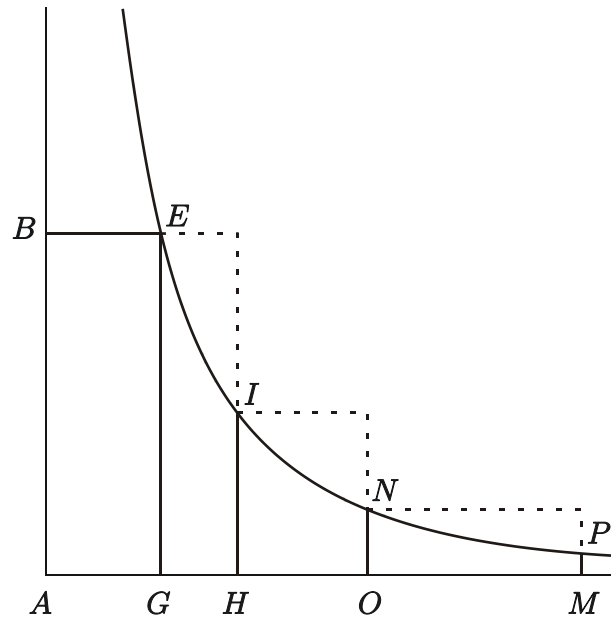
Cela signifie, en définissant la raison $r := \frac{x_{k+1}}{x_k}$, que

$$\frac{1}{r} - 1 = \frac{x_0}{\sum_{k=1}^{\infty} x_k}$$

et par suite que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = x_0 + \frac{x_0}{\frac{1}{r} - 1} = x_0 + \frac{r \cdot x_0}{1 - r} = \frac{x_0 - r \cdot x_0 + r \cdot x_0}{1 - r} = \frac{x_0}{1 - r} !$$

Fermat attaque en premier la quadrature d'une hyperbole



telle qu'on ait toujours le même rapport entre une puissance de AH et la même puissance de AG d'une part et une puissance (différente ou égale à la précédente) de GE et la même puissance de HI , i.e.

$$\frac{AH^p}{AG^p} = \frac{GE^q}{HI^q},$$

où puissance ne signifie pas seulement $p, q \in \{1, 2, \dots\}$, mais aussi $p, q \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. En fait toutes les puissance rationnelles $s = \frac{p}{q}$ sont possibles, puisque si $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ désigne la fonction correspondante, on a

$$\left(\frac{y}{x}\right)^p = \left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^q$$

et par suite

$$f(x) = \frac{c}{x^s},$$

en ayant posé $c := AG^s \cdot GE = AG^{s-1} \cdot AG \times GE$ pour $y := AG \in \mathbb{R}_+^*$.

Fermat poursuit en affirmant que toutes les hyperboles, sauf celle d'Apollonius ou la première, i.e. $s = 1$, sont quarrables jusqu'à l'infini. Son allusion à la première hyperbole montre clairement qu'il suppose $s \geq 1$. Citons Fermat (cf. [17], p. 218) :

Imaginons les termes d'une progression géométrique décroissant ¹ indéfiniment ; soit AG le premier, AH le second, AO le troisième, etc. Supposons que ces termes soient assez rapprochés les uns des autres pour que, suivant la méthode d'Archimède, on puisse *adégaler*, comme dit Diophante, ou égal par approximation le parallélogramme rectiligne $GE \times GH$ au quadrilatère mixtiligne $GHIE$; nous supposerons de plus que les premiers intervalles GH , HO , OM , etc. des termes progressifs soient suffisamment égaux entre eux, pour que l'on puisse employer la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible par circonscriptiions et inscriptiions. Il suffit de faire cette remarque une fois pour ne pas s'obliger à revenir et à insiter constamment sur un artifice bien connu de tous les géomètres.

Pour la méthode de compression d'Archimède voir 1.7. Il considère les cas $p = 2, 3$ et $q = 1$,

¹ C'est probablement un lapsus !

puis remarque que la méthode s'étend au cas général que nous écrirons sous la forme

$$\frac{AH^s}{AG^s} = \frac{GE}{HI} .$$

Il constate tout d'abord sans démonstration, puisque (AG, AH, AO, \dots) est une progression géométrique, que (GH, HO, OM, \dots) en est aussi une et de même raison $\frac{AG}{AH}$: en effet

$$\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} , \quad (\otimes)$$

donc

$$\frac{GH}{HO} = \frac{AH - AG}{AO - AH} = \frac{AG}{AH} \cdot \frac{\frac{AH}{AG} - 1}{\frac{AO}{AH} - 1} = \frac{AG}{AH} . \quad (\otimes\otimes)$$

Ainsi

$$\frac{GE \times GH}{HI \times HO} = \frac{AH^s \times AG}{AG^s \times AH} = \frac{AO^s \times AG}{AH^s \times AH} = \frac{HI \times HO}{ON \times OM}$$

(c'est l'argumentation du bas de la page 218 et du début de 219). Ceci montre que les surfaces des rectangles

$$(GE \times GH, HI \times HO, ON \times OM, \dots)$$

forment aussi une progression géométrique de raison

$$\frac{AG^{s-1}}{AH^{s-1}} .$$

Fermat écrit $\frac{AH}{AG}$ lorsque $s = 2$! Mais cela n'a pas d'importance pour appliquer son théorème, mais utile pour constater qu'elle décroît indéfiniment, ce qui est le cas si $s > 1$ (voir le commentaire de Fermat, p. 220). Ainsi

$$\frac{GE \times GH - HI \times HO}{HI \times HO} = \frac{GE \times GH}{HI \times HO} - 1 = \frac{AH^s \times AG - AG^s \times AH}{AG^s \times AH} = \frac{AH^{s-1}}{AG^{s-1}} - 1$$

Dans les cas $s = 2$, i.e. $\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{GE}{HI}$ et $s = 3$, i.e. $\frac{AH^3}{AG^3} = \frac{GE}{HI}$, Fermat obtient respectivement

$$\frac{GE \times GH - HI \times HO}{HI \times HO} \stackrel{\otimes\otimes}{=} \frac{AH^2}{AG^2} \cdot \frac{AG}{AH} - 1 = \frac{AH - AG}{AG} = \frac{GH}{AG} ,$$

p. 219, et

$$\frac{GE \times GH - HI \times HO}{HI \times HO} \stackrel{\otimes\otimes}{=} \frac{AH^3}{AG^3} \cdot \frac{AG}{AH} - 1 \stackrel{\otimes}{=} \frac{AH}{AG} \cdot \frac{AO}{AH} - 1 = \frac{AO - AG}{AG} = \frac{GO}{AG} ,$$

p. 219-220, mais sans faire les calculs ! Grâce au théorème cette quantité est égale au rapport de $GE \times GH$ à la somme de tous les autres rectangles (en nombre indéfini !) ou par l'adéquation d'Archimède, à la surface S_1 délimitée par la courbe, le segment HI et l'axe des x , i.e.

$$\frac{GH}{AG} \simeq \frac{GE \times GH}{S_1} \quad \text{et respectivement} \quad \frac{GO}{AG} \simeq \frac{GE \times GH}{S_1} .$$

Si S désigne la surface délimitée par la courbe, le segment GE et l'axe des x , on a $S \simeq S_1$, puisque $GE \times GH$ s'évanouit et se réduit à rien d'après Fermat !

Dans le premier cas, il obtient

$$\frac{GE \times GH}{GE \times AG} = \frac{GH}{AG} = \frac{GE \times GH}{S_1} ,$$

donc

$$S \simeq S_1 \simeq GE \times AG ,$$

et respectivement

$$\frac{GE \times GO}{GE \times AG} = \frac{GO}{AG} = \frac{GE \times GH}{S_1},$$

donc

$$\frac{GO}{GH} = \frac{GE \times GO}{GE \times GH} = \frac{GE \times AG}{S_1};$$

mais dans ce cas

$$\frac{GO}{GH} = \frac{GH + HO}{GH} \simeq \frac{2 \cdot GH}{GH} = 2;$$

Fermat rappelle simplement que les intervalles GH et HO , qui sont voisins de la base GE sont sensiblement égaux entre eux. Ainsi

$$S \simeq S_1 \simeq \frac{GH}{GO} \cdot GE \times AG = \frac{1}{2} \cdot GE \times AG.$$

Cela revient de façon moderne en posant $R := \left(\frac{AH}{AG}\right)^{\frac{1}{q}}$ à écrire

$$\begin{aligned} R^{p-q} - 1 &= \left(\frac{AH}{AG}\right)^{\frac{p-q}{q}} - 1 = \frac{AH^{\frac{p}{q}-1}}{AG^{\frac{p}{q}-1}} - 1 \simeq \frac{GE \times GH}{S_1} = \frac{GH}{AG} \cdot \frac{GE \times AG}{S_1} = \\ &= \frac{AH - AG}{AG} \cdot \frac{GE \times AG}{S_1} = (R^q - 1) \cdot \frac{GE \times AG}{S_1}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} S \simeq S_1 &\simeq \frac{R^q - 1}{R^{p-q} - 1} \cdot GE \times AG = \frac{R^{q-1} + R^{q-2} + \dots + 1}{R^{p-q-1} + R^{p-q-2} + \dots + 1} \cdot GE \times AG \simeq \\ &\simeq \frac{q}{p-q} \cdot GE \times AG = \frac{1}{\frac{p}{q} - 1} \cdot GE \times AG. \end{aligned}$$

Est-ce que Fermat a pu concevoir une telle démonstration ? Je peux me l'imaginer sur certains exemples un peu plus compliqués que ceux qu'il a explicités, mais le manque d'un système de calcul plus puissant que celui de la comparaison de rapports se fait sentir.

REMARQUE Voici une démonstration moderne pour $s > 1$ quelconque : Etant donné un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ donné, on considère une subdivision en progression géométrique $(a \cdot r_n^k)_{k=0, \dots, n}$ de $[a, b]$, donc telle que $b = a \cdot r_n^n$ pour un $r_n > 1$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x^s} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(a \cdot r_n^k)^s} \cdot (a \cdot r_n^{k+1} - a \cdot r_n^k) = \\ &= \frac{1}{a^{s-1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n - 1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r_n^{s-1}}\right)^k = \\ &= \frac{1}{a^{s-1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(r_n - 1) \cdot \left(\left(\frac{1}{r_n^{s-1}}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{r_n^{s-1}} - 1} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{s-1} - 1}{a^{s-1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{r_n^{1-s} - 1}{r_n - 1}} = \\ &= \left(\left(\frac{1}{b}\right)^{s-1} - \left(\frac{1}{a}\right)^{s-1}\right) \cdot \frac{1}{(\text{id}^{1-s})'(1)} = \frac{1}{s-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{s-1} - \left(\frac{1}{b}\right)^{s-1}\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-s} \cdot \left[\text{id}^{1-s} \right]_a^b.$$

Nous avons interprété $\frac{r_n-1}{\frac{1}{r_n^{s-1}}-1}$ comme un quotient différentiel. Si $s = \frac{p}{q}$, on peut calculer cette

limite comme ci-dessus en posant $R_n := r_n^{\frac{1}{q}}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - 1}{\frac{1}{r_n^{s-1}} - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n^{p-q} \cdot (R_n^q - 1)}{1 - R_n^{p-q}} = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n^{q-1} + R_n^{q-2} + \dots + 1}{R_n^{p-q-1} + R_n^{p-q-2} + \dots + 1} = - \frac{q}{p-q} = \frac{1}{1 - \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{1}{x^s} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x^s} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{s-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{a} \right)^{s-1} - \left(\frac{1}{b} \right)^{s-1} \right) = \\ &= \frac{1}{s-1} \cdot \left(\frac{1}{a} \right)^{s-1}. \end{aligned}$$

□

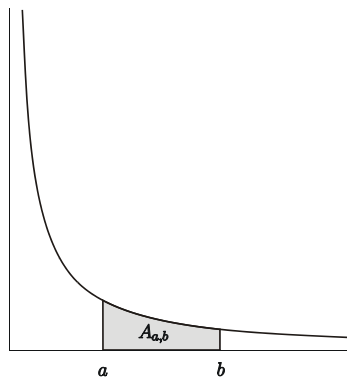
3.5 Saint-Vincent

Grégoire de Saint-Vincent : 1584 - 1667 ,

jésuite belge, montre dans son traité *Opus Geometricum* publié en 1647 , que la surface $A_{a,b}$ entre deux abscisses $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ sous le graphe de l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$ possède la propriété

$$A_{t \cdot a, t \cdot b} = A_{a,b}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.



En utilisant une subdivision $(x_j)_{j=0, \dots, n}$ de $[a, b]$ ayant une finesse infinitésimale, on a

$$A_{a,b} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{x_j} .$$

Mais comme $(t \cdot x_j)_{j=0, \dots, n}$ est une subdivision de $[t \cdot a, t \cdot b]$ ayant également une finesse infinitésimale, il vient

$$A_{t \cdot a, t \cdot b} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t \cdot b - t \cdot a}{n} \cdot \frac{1}{t \cdot x_j} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{x_j} = A_{a,b} ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

En lisant l'oeuvre de Saint-Vincent, son ami A.A. de Sarasa constata que cette surface est liée à l'équation fonctionnelle du logarithme. Plus précisément

DEFINITION Etant donné $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit

$$L(x) := \begin{cases} A_{1,x} & 1 \leq x \\ -A_{x,1} & 0 < x < 1 \end{cases} .$$

PROPOSITION Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$L(x \cdot y) = L(x) + L(y) .$$

Par exemple si $1 \leq x \leq y$, on a immédiatement

$$L(x \cdot y) = A_{1,x \cdot y} = A_{1,x} + A_{x,x \cdot y} = A_{1,x} + A_{1,y} = L(x) + L(y) .$$

On procède de même pour les autres cas $0 < x \leq y \leq 1$ et $0 < x \leq 1 < y$. □

REMARQUE Cette propriété permet de montrer élémentairement que $L'(x) = \frac{1}{x}$!

En effet on a

$$L'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot L\left(\frac{x+h}{x}\right) ,$$

puisque

$$L\left(\frac{x+h}{x} \cdot x\right) = L\left(\frac{x+h}{x}\right) + L(x) .$$

Il vient ensuite

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot L\left(\frac{x+h}{x}\right) &= \frac{1}{x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \cdot L\left(\frac{x+h}{x}\right) = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(1+\varepsilon) - L(1)}{\varepsilon} = \frac{1}{x} \cdot L'(1) . \end{aligned}$$

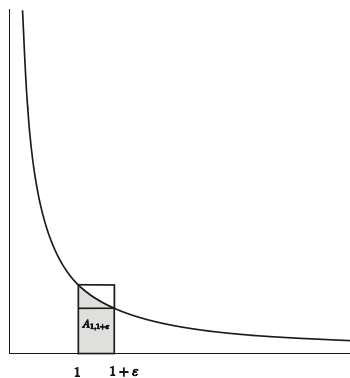
Mais finalement, si $\varepsilon > 0$, on a $L(1+\varepsilon) - L(1) = A_{1,1+\varepsilon}$ et

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq A_{1,1+\varepsilon} \leq \varepsilon ,$$

ainsi que $L(1+\varepsilon) - L(1) = -A_{1+\varepsilon,1}$ et

$$-\varepsilon \leq A_{1+\varepsilon,1} \leq \frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon} ,$$

si $\varepsilon < 0$,



donc $L'(1) = 1$. □

3.6 Wallis

John Wallis : 1616 - 1703

Wallis justifie en partie et conjecture dans son livre *Arithmetica Infinitorum* publié en 1655 que la formule de Cavalieri (*) dans 3.3 est aussi valable pour des valeurs rationnelles de s , voire même par exemple pour $s = \sqrt{3}$. Mais son but est de quarrer le demi-cercle, donc de montrer que

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

En utilisant une subdivision de largeur constante égale à $\frac{1}{n}$, on voit que

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}},$$

formule ne permettant aucune manipulation dû à la présence de la racine quarrée! Wallis procède de la manière suivante :

Utilisant la méthode des indivisible de Cavalieri, il sait que

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^k dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1}} \cdot \sum_{l=0}^n l^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \cdot n^k} \cdot \sum_{l=0}^n l^k = \\ &= \frac{0^k + 1^k + \dots + n^k}{n^k + n^k + \dots + n^k}. \end{aligned}$$

Il remarque que

$$\frac{0^1 + 1^1 + \dots + n^1}{n^1 + n^1 + \dots + n^1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1},$$

$$\frac{0^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

⋮

$$\frac{0^2 + 1^2 + \dots + n^2}{n^2 + n^2 + \dots + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1},$$

$$\frac{0^3 + 1^3}{1^3 + 1^3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3}{2^3 + 2^3 + 2^3} = \frac{9}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

⋮

$$\frac{0^3 + 1^3 + \dots + n^3}{n^3 + n^3 + \dots + n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{3+1},$$

formules que l'on peut montrer par récurrence :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+2) \cdot (n+1)^3} \cdot \sum_{l=0}^{n+1} l^3 - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{(n+1) \cdot n^3}{(n+2) \cdot (n+1)^3} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot n^3} \cdot \sum_{l=0}^n l^3 + \frac{(n+1)^3}{(n+2) \cdot (n+1)^3} - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{n^3}{(n+2) \cdot (n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{4n} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{1}{4(n+2) \cdot (n+1)} \cdot \left(n^2 + 4(n+1) - (n+2) \cdot (n+1) \right) = \\ &= \frac{1}{4(n+1)}. \end{aligned}$$

Il en déduit, sans démonstration, que

$$\int_0^1 x^k dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^k + 1^k + \dots + n^k}{n^k + n^k + \dots + n^k} = \frac{1}{k+1}.$$

Il définit alors définit l'indice $I(f)$ d'une fonction f sur \mathbb{R}_+ par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(1) + \dots + f(n)}{f(n) + f(n) + \dots + f(n)} = \frac{1}{I(f) + 1}.$$

Les considérations précédentes montrent donc que

$$I(\text{id}^k) = k$$

et il en déduit aussi sans démonstration que I transforme une suite géométrique en une suite arithmétique; en conséquence

$$0 = I(1) \quad , \quad I(\sqrt[q]{\text{id}}) \quad , \quad I\left(\left(\sqrt[q]{\text{id}}\right)^2\right) \quad , \quad \dots I\left(\left(\sqrt[q]{\text{id}}\right)^p\right) \dots \quad , \quad I(\text{id}) = 1$$

est une suite arithmétique, puisque

$$1 = \left(\sqrt[q]{\text{id}}\right)^0 \quad , \quad \sqrt[q]{\text{id}} \quad , \quad \left(\sqrt[q]{\text{id}}\right)^2 \quad , \quad \dots \left(\sqrt[q]{\text{id}}\right)^p \dots \quad , \quad \text{id} = \left(\sqrt[q]{\text{id}}\right)^q$$

est une suite géométrique. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ il obtient ainsi

$$I\left(\sqrt[q]{\text{id}}\right) = \frac{1}{q} \quad \text{et par suite} \quad I\left(\left(\sqrt[q]{\text{id}}\right)^p\right) = \frac{p}{q},$$

donc

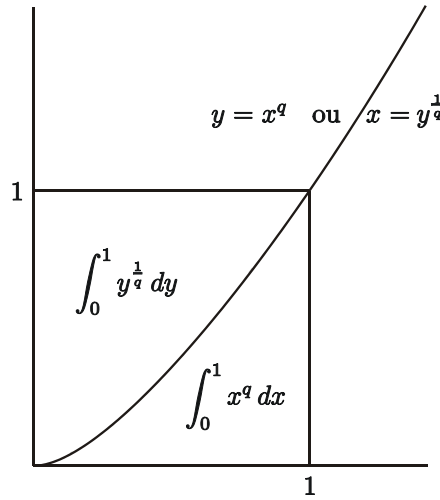
$$\int_0^1 x^{\frac{p}{q}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[q]{0}\right)^p + \left(\sqrt[q]{1}\right)^p + \dots + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p}{\left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \dots + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p} = \frac{1}{\frac{p}{q} + 1} = \frac{q}{p+q}.$$

Ce sont aussi ces considérations qui l'on conduit à introduire la notation

$$\left(\sqrt[q]{x}\right)^p = x^{\frac{p}{q}}.$$

Wallis a pu vérifier sa formule dans le cas $p = 1$, puisque

$$\int_0^1 x^q dx + \int_0^1 y^{\frac{1}{q}} dy = 1 ,$$



donc

$$\int_0^1 y^{\frac{1}{q}} dy = 1 - \int_0^1 x^q dx = 1 - \frac{1}{1+q} = \frac{q}{1+q} .$$

Rappelons que Fermat et Torricelli avaient déjà démontrés cette formule, probablement au début des années 1640. Fermat l'a mis sous forme définitive en 1659 comme critique au livre de Wallis (cf. la correspondance avec Digby entre 1657 et 1658).

Revenons au problème du calcul de $\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$. Wallis calcule les valeurs de

$$a_{p,q} := \left(\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx \right)^{-1}$$

pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $p, q \leq 10$. Par exemple

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(1 - 2x^{\frac{1}{2}} + x\right) dx = 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} ,$$

donc

$$a_{2,2} = 6 .$$

Il obtient la table suivante

$$(a_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

en ayant posé $a_{0,q} := 1$, puisque pour $x \in [0, 1[$, on a $\lim_{p \rightarrow 0} x^{\frac{1}{p}} = 0$. Il accepte simplement que c'est la table des coefficients binomiaux, donc que

$$a_{p+1,q+1} = a_{p+1,q} + a_{p,q+1} .$$

C'est la même table que celle des nombres figurés de Fermat, mais l'indexation suivant q est dans \mathbb{N} et non dans \mathbb{N}^* ! On a donc

$$a_{p,q} = \frac{(q+1) \cdot (q+2) \cdot \dots \cdot (q+p)}{p!} = \binom{p+q}{p}. \quad (*)$$

Son but est de déterminer

$$a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (1-x^2)^2 \right)^{-1} !$$

Il considère alors la table $(a_{p,q})_{p,q \in \frac{1}{2} \cdot \mathbb{N}}$ et calcul par exemple

$$\frac{1}{a_{\frac{1}{2}, 1}} = \int_0^1 (1-x^2) dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{a_{\frac{1}{2}, 2}} = \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15},$$

$$\frac{1}{a_{\frac{3}{2}, 2}} = \int_0^1 (1-x^{\frac{2}{3}})^2 dx = 1 - 2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{7} = \frac{8}{35}$$

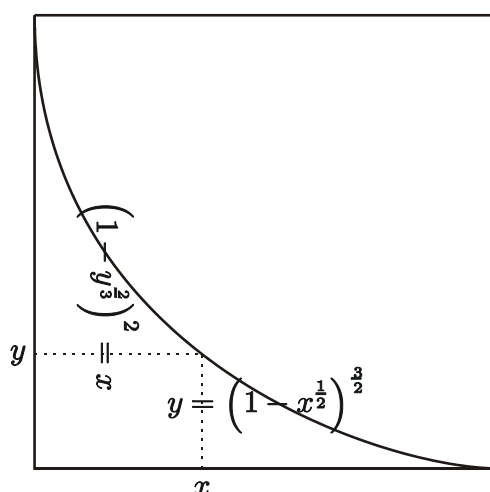
mais aussi

$$\frac{1}{a_{1, \frac{1}{2}}} = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx \stackrel{y=1-x}{=} \int_0^1 y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{2}{3}$$

et

$$\frac{1}{a_{2, \frac{3}{2}}} = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^1 (1-y^{\frac{2}{3}})^2 dy = 1 - 2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{7} = \frac{8}{35},$$

puisque'on a la figure



Il est alors persuadé que

$$a_{p, \frac{r}{2}} = \frac{\left(\frac{r}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{r}{2} + 2\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{r}{2} + p\right)}{p!} = a_{\frac{r}{2}, p} \quad \text{pour tout } p, r \in \mathbb{N},$$

et obtient la table

$$(a_{p,q})_{p,q \in \frac{1}{2} \cdot \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & \square & \frac{3}{2} & \circ & \frac{15}{8} & \circ & \frac{105}{48} & \dots \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{7}{2} & 4 & \dots \\ 1 & \circ & \frac{5}{2} & \circ & \frac{35}{8} & \circ & \frac{315}{48} & \dots \\ 1 & \frac{15}{8} & 3 & \frac{35}{8} & 6 & \frac{63}{8} & 10 & \dots \\ 1 & \circ & \frac{7}{2} & \circ & \frac{63}{8} & \circ & \frac{693}{48} & \dots \\ 1 & \frac{105}{48} & 4 & \frac{315}{48} & 10 & \frac{693}{48} & 20 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

qui n'est pas encore complètement remplie.

Utilisant la formule (*) des coefficients binomiaux, on vérifie immédiatement que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a les relations de récurrence

$$a_{p,q+1} = \frac{p+q+1}{q+1} \cdot a_{p,q} \quad \text{et} \quad a_{p+1,q} = \frac{p+q+1}{p+1} \cdot a_{p,q}.$$

Wallis constate qu'elles sont aussi valables pour les termes qu'il a introduit, i.e. $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \frac{1}{2} \cdot \mathbb{N}$ ou bien $p \in \frac{1}{2} \cdot \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$. Il les utilise alors pour compléter la table en fonction de $\square = a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}$.

$$(a_{p,q})_{p,q \in \frac{1}{2} \cdot \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & \frac{4}{\pi} & \frac{3}{2} & \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot \pi} & \frac{15}{8} & \frac{8 \cdot 4}{5 \cdot \pi} & \frac{105}{48} & \dots \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{7}{2} & 4 & \dots \\ 1 & \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot \pi} & \frac{5}{2} & \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot \pi} & \frac{35}{8} & \frac{64 \cdot 4}{15 \cdot \pi} & \frac{315}{48} & \dots \\ 1 & \frac{15}{8} & 3 & \frac{35}{8} & 6 & \frac{63}{8} & 10 & \dots \\ 1 & \frac{8 \cdot 4}{5 \cdot \pi} & \frac{7}{2} & \frac{64 \cdot 4}{15 \cdot \pi} & \frac{63}{8} & \frac{128 \cdot 4}{15 \cdot \pi} & \frac{693}{48} & \dots \\ 1 & \frac{105}{48} & 4 & \frac{315}{48} & 10 & \frac{693}{48} & 20 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

En particulier, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{\frac{1}{2}, \frac{r}{2}+1} = \frac{\frac{r}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{r}{2} + 1} \cdot a_{\frac{1}{2}, \frac{r}{2}} = \frac{r+3}{r+2} \cdot a_{\frac{1}{2}, \frac{r}{2}},$$

donc

$$a_{\frac{1}{2}, 1} = a_{\frac{1}{2}, \frac{0}{2}+1} = \frac{3}{2} \cdot a_{\frac{1}{2}, 0} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad a_{\frac{1}{2}, 2} = a_{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}+1} = \frac{5}{4} \cdot a_{\frac{1}{2}, 1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2},$$

puis pour r pair

$$a_{\frac{1}{2}, \frac{r}{2}} = a_{\frac{1}{2}, \frac{r-2}{2}+1} = \frac{r-2+3}{r-2+2} \cdot a_{\frac{1}{2}, \frac{r-2}{2}} = \dots = \frac{r+1}{r} \cdot \frac{r-1}{r-2} \cdot \dots \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}.$$

De même

$$a_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} = a_{2, \frac{1}{2}+1} = \frac{4}{3} \cdot a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}}{2} \quad \text{et} \quad a_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}} = a_{2, \frac{3}{2}+1} = \frac{6}{5} \cdot a_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}}{2},$$

puis pour r impair

$$a_{\frac{1}{2}, \frac{r}{2}} = a_{\frac{1}{2}, \frac{r-2}{2}+1} = \frac{r-2+3}{r-2+2} \cdot a_{\frac{1}{2}, \frac{r-2}{2}} = \dots = \frac{r+1}{r} \cdot \frac{r-1}{r-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}}{2}.$$

Puisque la suite $\left(\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $\left(a_{\frac{1}{2}, \frac{n}{2}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc

$$a_{\frac{1}{2}, \frac{2n-1}{2}} \leq a_{\frac{1}{2}, \frac{2n}{2}} \leq a_{\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2}},$$

i.e.

$$\frac{a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}}{2} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j-1} \leq \prod_{j=1}^n \frac{2j+1}{2j} \leq \frac{a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j}{2j-1}.$$

On en déduit que

$$\prod_{j=1}^n \frac{4j^2}{(2j-1) \cdot (2j+1)} \leq \frac{2}{a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}} \leq \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{4j^2}{(2j-1) \cdot (2j+1)}$$

et, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1$ et $\frac{2}{a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2}$, on obtient finalement la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{2j \cdot 2j}{(2j-1) \cdot (2j+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots$$

Il faut remarquer que la convergence de ce produit est misérable : on a

$$2 \cdot \prod_{j=1}^{70} \frac{2j \cdot 2j}{(2j-1) \cdot (2j+1)} =$$

$$= \frac{60\,708\,402\,882\,054\,033\,466\,233\,184\,588\,234\,965\,832\,575\,213\,720\,379\,360\,039\,119\,137\,804\,340\,758\,912\,662\,765\,568}{19\,392\,731\,000\,954\,151\,746\,924\,547\,769\,397\,679\,993\,739\,004\,628\,863\,529\,286\,011\,849\,423\,516\,122\,644\,852\,093\,125} = 3.130\dots$$

REMARQUE Les considérations d'ordre géométrique que Wallis a utilisées pour calculer certaines intégrales, peuvent se mettre sous forme moderne de la manière suivante : Soit $f : [a, b] \rightarrow f([a, b])$ une bijection continûment dérivable. On a

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = \left[x \cdot f(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) dx.$$

En effet grâce au changement de variable $x = f^{-1}(y)$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f\left(f^{-1}(y)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(y) dy = \int_{f(a)}^{f(b)} y \cdot \left(f^{-1}\right)'(y) dy =$$

$$= \left[y \cdot f^{-1}(y) \right]_{f(a)}^{f(b)} - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = \left[x \cdot f(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) dx.$$

□

3.7 Roberval

Gilles Personne de Roberval : 1602 - 1675

dans son petit traité, écrit par l'un de ses élèves et publié avec ses remarques en marge, *Observations sur la composition des mouvemens et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes* [26], se propose essentiellement, comme il le dit lui-même, "de tirer du mélange des mouvemens une méthode générale pour trouver les touchantes des lignes courbes." Sa méthode (présentée à l'Académie royale des sciences en 1668) est résumée dans son

Axiome, ou principe d'Invention *La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.*

Roberval remarque (ibidem p. 80) :

Le principe est assez intelligible, et on l'accordera facilement dès qu'on l'aura considéré avec un peu d'attention.

Il peut alors déterminer les tangentes aux courbes grâce à sa

Règle générale *Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvemens composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.*

Sa démonstration est très concise, car il dit qu'elle "est mot à mot dans notre principe" ! Il admet implicitement, en justifiant son point de vue par des exemples, que la règle du parallélogramme des vitesses est applicable aux vitesses instantanées.

Ces travaux ont certainement été fondamentaux pour asseoir la notion de vitesse instantanée et de décomposer un mouvement, ne serait-ce que par rapport à des axes cartésiens, comme le fera Newton un peu plus tard.

La règle générale et la notion de composition de Roberval peuvent être interprétées en termes modernes de la manière suivante :

Un mouvement au voisinage d'un point v est donné par une application $\Phi : t \mapsto \Phi(t) : I \rightarrow \mathcal{C}^{(1)}(X, \mathbb{R}^2)$, où I est un intervalle contenant 0, X un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\Phi(0) = \text{Id}$. Le déplacement du point v est donc décrit par $t \mapsto \Phi(t)v$ et sa vitesse en t est alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (\Phi(t+h)(v) - \Phi(t)(v)) =: \Phi'(t)(v) .$$

Si Ψ est un autre mouvement, alors le mouvement composé est $\Psi \circ \Phi : t \mapsto \Psi(t) \circ \Phi(t)$ et la vitesse correspondante est

$$(\Psi \circ \Phi)'(t)(v) = \Psi'(t)(\Phi(t)v) + \Psi(t)(\Phi'(t)(v))$$

avec les bonnes hypothèses de continuité et de dérivabilité (démonstration !). On a alors

$$(\Psi \circ \Phi)'(0)(v) = \Psi'(0)(v) + \Phi'(0)(v) ,$$

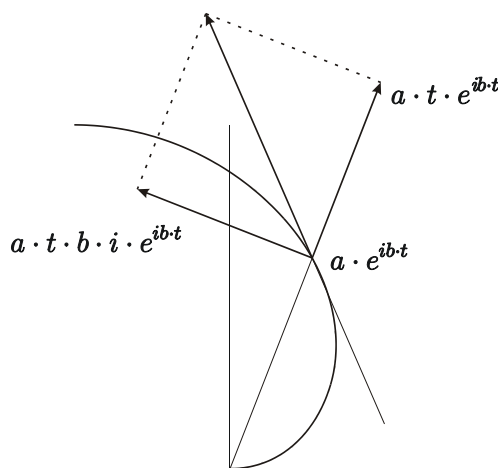
puisque $\Phi(0) = \Psi(0) = \text{Id}$. C'est la règle d'addition des vitesses instantanées.

Il détermine comme premiers exemples les tangentes aux sections coniques et retrouve les résultats connus. Nous traiterons le cas de l'ellipse ci-dessous. Il considère aussi

les lignes principales qu'ont connu les anciens et quelques-unes que l'on a décrit depuis peu.

EXEMPLE 1 De la spirale ou hélice (ibidem p. 92).

Considérons tout d'abord la spirale d'Archimède engendrée par la rotation d'un rayon de sommet 0 à la vitesse angulaire b et du déplacement à vitesse constante a d'un point partant de 0 sur ce rayon. Le vecteur vitesse est alors d'après Roberval la somme du vecteur orthogonal au rayon dans la direction de la rotation et de longueur $a \cdot t \cdot b$ et du vecteur dans la direction du rayon de longueur a .



Utilisant les nombres complexes la spirale d'Archimède au voisinage du temps $\tau \neq 0$ est décrite par

$$t \mapsto a \cdot t \cdot e^{ib \cdot t} = \frac{a \cdot t}{a \cdot \tau} \cdot e^{ib \cdot (t-\tau)} \cdot (a \cdot \tau \cdot e^{ib \cdot \tau}) ,$$

donc par composition des deux mouvements

$$\Phi(s) : v \mapsto e^{ib \cdot s} \cdot v \quad \text{et} \quad \Psi(s) : v \mapsto \frac{a \cdot (s + \tau)}{a \cdot \tau} \cdot v$$

au voisinage du point $a \cdot \tau \cdot e^{ib \cdot \tau}$. en effet

$$\Phi'(0) (a \cdot \tau \cdot e^{ib \cdot \tau}) = ib \cdot a \cdot \tau \cdot e^{ib \cdot \tau} ,$$

et $i \cdot e^{ib \cdot \tau}$ est un vecteur unité orthogonal à $e^{ib \cdot \tau}$ dans la direction de la rotation, et

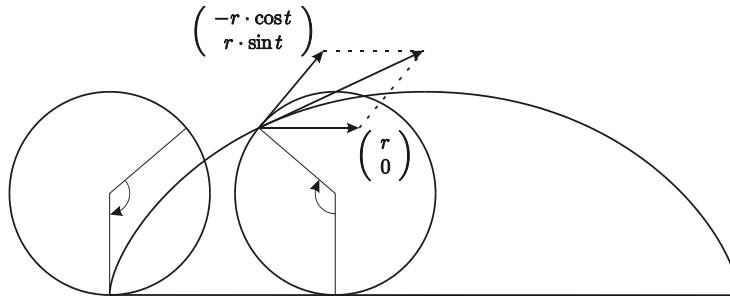
$$\Psi'(0) (a \cdot \tau \cdot e^{ib \cdot \tau}) = \frac{1}{\tau} \cdot a \cdot \tau \cdot e^{ib \cdot \tau} = a \cdot e^{ib \cdot \tau} .$$

Ce résultat s'obtient directement en dérivant la représentation paramétrée de la spirale d'Archimède $t \mapsto a \cdot t \cdot e^{ib \cdot t}$ en $\tau : ib \cdot a \cdot \tau \cdot e^{ib \cdot \tau} + a \cdot e^{ib \cdot \tau}$.

EXEMPLE 2 Onzième exemple, de la roulette ou trochoïde de M. de Roberval (ibidem p. 105).

Pour déterminer la tangente à la cycloïde, trajectoire d'un point sur un cercle de rayon r roulant sans glissement sur une droite, Roberval la considère comme obtenue en superposant deux mouvements, d'une part la rotation de ce cercle de vitesse angulaire 1 et d'autre part la translation du centre du cercle de vitesse r . Utilisant sa règle il en déduit, avec nos notations, que le vecteur vitesse est

$$\begin{pmatrix} -r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} .$$



En effet après avoir effectué une rotation, dans le sens négatif, de t radians le cercle s'est déplacé de $r \cdot t$ sur l'axe des x . L'origine $(0, 0)$ se trouve donc en

$$R_t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ -r \cdot \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot t \\ r \end{pmatrix} ,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$T_t \circ R_t \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} ,$$

où

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_t : v \longmapsto v + \begin{pmatrix} r \cdot t \\ r \end{pmatrix}$$

sont respectivement la rotation d'angle $-t$ dans \mathbb{R}^2 et de centre $(0, 0)$ et la translation par $(r \cdot t, r)$. Au voisinage de $\tau \neq 0$, la cycloïde est donc décrite par

$$T_{t-\tau} \circ (T_\tau \circ R_{t-\tau} \circ T_{-\tau}) \left(T_\tau \circ R_\tau \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} \right) ,$$

donc par composition des deux mouvements

$$\Phi(s) : v \longmapsto T_\tau \circ R_{t-\tau} \circ T_{-\tau} v = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} r \cdot \tau \\ r \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} r \cdot \tau \\ r \end{pmatrix}$$

et

$$\Psi(s) : v \longmapsto T_s v = v + \begin{pmatrix} r \cdot s \\ r \end{pmatrix} .$$

Le résultat de Roberval en découle immédiatement puisque

$$\Phi'(0) \left(T_\tau \circ R_\tau \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(R_\tau \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

et

$$\Psi'(0) \left(T_\tau \circ R_\tau \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce résultat s'obtient directement en dérivant la représentation paramétrée de la cycloïde

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ -r \cdot \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot t \\ r \end{pmatrix}$$

en τ :

$$\begin{pmatrix} -r \cdot \cos \tau \\ r \cdot \sin \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} .$$

EXEMPLE 3 Troisième exemple des touchantes de l'ellipse (ibidem p. 82).

Soient E une ellipse de centre $(0,0)$, de demi-axes $a, b > 0$ et dont les foyers se trouvent en $(\pm c, 0)$, I un intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application dérivable avec $\gamma(I) \subset E$. On écrit

$$\gamma_{\pm} := \gamma - (\pm c, 0)$$

et, par la méthode du jardinier (cf. 1.11), on a

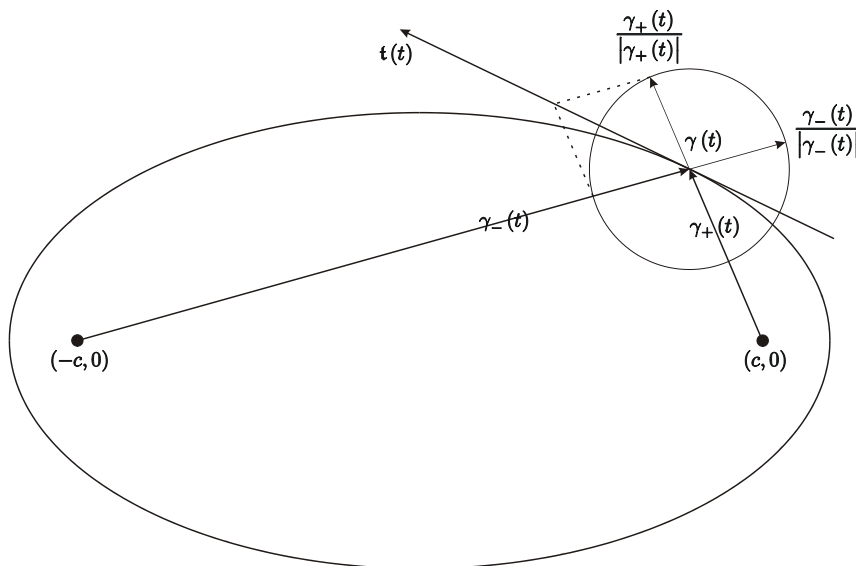
$$|\gamma_+| + |\gamma_-| = 2a ,$$

donc

$$|\gamma_-|' = -|\gamma_+|' .$$

La justification de Roberval (ibidem p. 83) est simplement :

... puisque le point $F (= \gamma(t))$ s'éloigne autant de l'un des points $A, B (= (\pm c, 0))$, qu'il s'approche de l'autre ...



Il considère donc le mouvement d'un point sur l'ellipse comme la "composition" d'un mouvement sur la droite engendrée par $\gamma_+(t)$ de vitesse $|\gamma_+|'(t)$ et d'un autre mouvement sur la droite engendrée par $\gamma_-(t)$ de vitesse $|\gamma_-|'(t) = -|\gamma_+|'(t)$. D'après la règle de Roberval le vecteur vitesse est donc donné (en notations modernes) par

$$\mathbf{t}(t) := |\gamma_+|'(t) \cdot \frac{\gamma_+(t)}{|\gamma_+(t)|} + |\gamma_-|'(t) \cdot \frac{\gamma_-(t)}{|\gamma_-(t)|} = |\gamma_+|'(t) \cdot \left(\frac{\gamma_+(t)}{|\gamma_+(t)|} - \frac{\gamma_-(t)}{|\gamma_-(t)|} \right) ,$$

ce qui montre que la tangente à l'ellipse en $\gamma(t)$ est la bissectrice de l'angle formé par les droites engendrées par $\gamma_+(t)$ et $-\gamma_-(t)$, résultat qui est correct. Malheureusement le vecteur vitesse de Roberval n'est en général pas égal à $\gamma'(t)$, et ceci quelque soit le paramétrage de cette ellipse. On peut le voir dans l'exercice qui suit.

EXERCICE Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

(a) Si $\vartheta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est dérivable, alors

$$|\vartheta|' = \left(\frac{\vartheta}{|\vartheta|} \middle| \vartheta' \right).$$

(b) Avec les notations de l'exemple 1 montrer que le vecteur vitesse de Roberval est

$$\mathbf{t} = \frac{(\gamma_+ | \gamma')}{|\gamma_+|^2} \cdot \gamma_+ + \frac{(\gamma_- | \gamma')}{|\gamma_-|^2} \cdot \gamma_-.$$

(c) Soit (ϵ_1, ϵ_2) une base normée de \mathbb{R}^2 . Si \mathfrak{s} est un vecteur $\neq 0$ de \mathbb{R}^2 tel que

$$\mathfrak{s} = (\mathfrak{s} | \epsilon_1) \cdot \epsilon_1 + (\mathfrak{s} | \epsilon_2) \cdot \epsilon_2,$$

alors $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$, i.e. (ϵ_1, ϵ_2) une base orthonormée de \mathbb{R}^2 .

(d) Toujours avec les notations de l'exemple 1 montrer que l'on a $\gamma' = \mathbf{t}$ au plus en 4 points de l'ellipse.

3.8 Les règles de Hudde et Sluze

Johann van Waveren Hudde : 1628 - 1704

Le nombre d'équations que Descartes doit résoudre augmente avec le degré de la fonction polynomiale considérée. Hudde a trouvé dans les années suivant 1650 une manière simple surmontant ces difficultés. Si P est un polynôme de degré n de la forme

$$P(x) = \sum_{j=0}^n c_j \cdot x^j ,$$

il introduit le polynôme \tilde{P} défini par

$$\tilde{P}(x) := \sum_{j=0}^n c_j \cdot (a + b \cdot j) \cdot x^j ,$$

où a, b sont des constantes données. Remarquons que l'application $\tilde{\cdot}$ est linéaire, donc un endomorphisme de l'espace vectoriel des polynômes.

PROPOSITION (Règle de Hudde) *Si P possède un zéro double en ξ , alors \tilde{P} possède un zéro en ξ .*

En effet on peut écrire

$$P(x) = (x - \xi)^2 \cdot \sum_{j=0}^{n-2} a_j \cdot x^j = \sum_{j=0}^{n-2} a_j \cdot [x^{j+2} - 2\xi \cdot x^{j+1} + \xi^2 \cdot x^j] ,$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x) &= \sum_{j=0}^{n-2} a_j \cdot [(a + b \cdot [j + 2]) \cdot x^{j+2} - 2\xi \cdot (a + b \cdot [j + 1]) \cdot x^{j+1} + \xi^2 \cdot (a + b \cdot j) \cdot x^j] = \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} a_j \cdot [(a + b \cdot j + 2b) x^2 - 2\xi \cdot (a + b \cdot j + b) x - \xi^2 \cdot (a + b \cdot j)] \cdot x^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} a_j \cdot [(a + b \cdot j) (x - \xi)^2 + 2b \cdot (x - \xi) x] \cdot x^j \end{aligned}$$

possède un zéro en ξ . □

REMARQUE La méthode de résolution de Descartes revient en fait à exprimer les coefficients a_j à l'aide des c_j ! Le polynôme \tilde{P} de Hudde est la première apparition, sous forme encore cachée, d'une fonction dérivée, puisqu'on a

$$\tilde{P}(x) = a \cdot \sum_{j=0}^n c_j \cdot x^j + b \cdot x \cdot \sum_{j=1}^n j \cdot c_j \cdot x^{j-1} = a \cdot P(x) + b \cdot x \cdot P'(x) ,$$

en particulier

$$\tilde{P} = \text{id} \cdot P'$$

si $a = 0$ et $b = 1$.

EXEMPLE 1 Déterminons la pente de la tangente à la courbe d'équation $y = x^n$ en appliquant la méthode du cercle. Le polynôme

$$P(x) = (x - \tau)^2 + x^{2n} - (\xi - \tau)^2 - \xi^{2n}$$

doit avoir un zéro double en ξ . Mais avec $a = 0$ et $b = 1$, il suffit de remplacer x^j dans P par $j \cdot x^j$ pour obtenir \tilde{P} ; il vient

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x) &= 2x^2 - 2\tau \cdot x + 0 \cdot \tau^2 + 2n \cdot x^{2n} - 0 \cdot [(\xi - \tau)^2 + \xi^{2n}] = \\ &= 2x^2 - 2\tau \cdot x + 2n \cdot x^{2n} . \end{aligned}$$

Mais comme $\tilde{P}(\xi) = 0$, on a

$$2\xi^2 - 2\tau \cdot \xi + 2n \cdot \xi^{2n} = 0 ,$$

donc

$$\frac{\tau - \xi}{\xi^n} = n \cdot \xi^{n-1} .$$

René François Walter de Sluze : 1622 - 1685

a probablement utilisé la règle de Hudde pour déterminer la pente de la tangente à une courbe algébrique C définie sous forme implicite par

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x, y) = 0 \}$$

avec

$$Q(x, y) = \sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot x^k \cdot y^l .$$

Cette méthode a été publiée sous forme de règle sans explication en 1673 dans les *Philosophical Transactions*.

Considérons une droite D d'équation $y = m \cdot x + h$. Cette droite est une tangente à C en (ξ, η) si ce point est un point double de l'intersection de D avec C , i.e. si

$$P(x) = Q(x, m \cdot x + h) = (x - \xi)^2 \cdot g(x) ,$$

où g est une fonction continue en ξ .

Pour pouvoir appliquer la règle de Hudde, avec $a = 0$ et $b = 1$, il nous suffit de calculer \tilde{P} . Par la linéarité de l'application $\tilde{}$, il nous suffit de calculer l'image de chaque polynôme

$$\begin{aligned} x \longmapsto x^k \cdot (m \cdot x + h)^l &= x^k \cdot \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \cdot (m \cdot x)^j \cdot h^{l-j} = \\ &= \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \cdot m^j \cdot h^{l-j} \cdot x^{k+j} . \end{aligned}$$

Par définition cette image est

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \cdot m^j \cdot h^{l-j} \cdot (k+j) \cdot x^{k+j} = \\
 & = k \cdot x^k \cdot \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \cdot (m \cdot x)^j \cdot h^{l-j} + m \cdot x^{k+1} \cdot \sum_{j=1}^l j \cdot \binom{l}{j} \cdot (m \cdot x)^{j-1} \cdot h^{l-j} = \\
 & = k \cdot x^k \cdot (m \cdot x + h)^l + m \cdot x^{k+1} \cdot \sum_{j=1}^l l \cdot \binom{l-1}{j-1} \cdot (m \cdot x)^{j-1} \cdot h^{l-j} = \\
 & = k \cdot x^k \cdot (m \cdot x + h)^l + m \cdot l \cdot x^{k+1} \cdot \sum_{p=0}^{l-1} \binom{l-1}{p} \cdot (m \cdot x)^p \cdot h^{l-1-p} = \\
 & = k \cdot x^k \cdot (m \cdot x + h)^l + m \cdot l \cdot x^{k+1} \cdot (m \cdot x + h)^{l-1} ,
 \end{aligned}$$

car

$$j \cdot \binom{l}{j} = j \cdot \frac{l!}{j! \cdot (l-j)!} = l \cdot \frac{(l-1)!}{(j-1)! \cdot (l-1-[j-1])!} = l \cdot \binom{l-1}{j-1}$$

et en ayant fait le changement d'indice $p = j - 1$. En posant

$$\widetilde{Q}_1(x, y) := \sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot k \cdot x^k \cdot y^l \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}_2(x, y) := \sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot x^k \cdot l \cdot y^l ,$$

il vient

$$\begin{aligned}
 \widetilde{P}(x) & = \sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot \left[k \cdot x^k \cdot (m \cdot x + h)^l + m \cdot l \cdot x^{k+1} \cdot (m \cdot x + h)^{l-1} \right] = \\
 & = \sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot k \cdot x^k \cdot (m \cdot x + h)^l + \frac{m \cdot x}{m \cdot x + h} \cdot \sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot x^k \cdot l \cdot (m \cdot x + h)^l = \\
 & = \widetilde{Q}_1(x, m \cdot x + h) + \frac{m \cdot x}{m \cdot x + h} \cdot \widetilde{Q}_2(x, m \cdot x + h) .
 \end{aligned}$$

Ainsi D est tangente à C en (ξ, η) si $\widetilde{P}(\xi) = 0$, i.e. si

$$\widetilde{Q}_1(\xi, \eta) + \frac{m \cdot \xi}{\eta} \cdot \widetilde{Q}_2(\xi, \eta) = 0 ;$$

nous avons donc montré le

THEOREME (Règle de Sluze) *La pente de la tangente à C en (ξ, η) est*

$$m = -\frac{\eta}{\xi} \cdot \frac{\widetilde{Q}_1(\xi, \eta)}{\widetilde{Q}_2(\xi, \eta)} .$$

3.9 Barrow

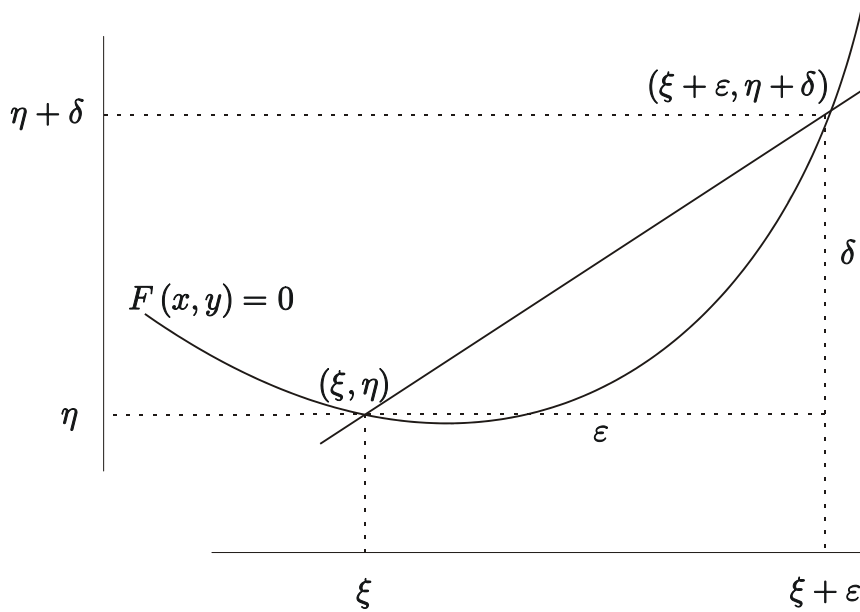
Les contributions fondamentales d'

Isaac Barrow : 1630 - 1677

en mathématiques ont été publiées en 1670 dans ses *Lectiones Geometricae* . Remarquons qu'il commence par étudier les courbes en utilisant la notion de mouvement, il a fait la connaissance de Roberval à Paris, mais la plupart de ses résultats sont formulés de manière géométrique et statique. Son influence fut pourtant importante car il continua, après Briggs, de développer la géométrie au Gresham College, puis à Cambridge, où Newton suivit ses cours. En particulier son étude sur les tangentes fut le point de départ de celle de Newton.

Pour déterminer la tangente à une courbe C d'équation $F(x, y) = 0$ Barrow considère un point $(\xi, \eta) \in C$ et deux infinitésimaux ε et δ tels que l'on ait $(\xi + \varepsilon, \eta + \delta) \in C$. On a donc

$$F(\xi, \eta) = F(\xi + \varepsilon, \eta + \delta) = 0 .$$



Il admet par l'intuition infinitésimale, évidemment en défaut dans l'image ci-dessus, que l'hypothénuse de ce qu'il appelle le *triangle caractéristique* est tangente à C en (ξ, η) , donc que la pente de la tangente est

$$m := \frac{\delta}{\varepsilon} .$$

De manière analogue à Fermat, mais remarquer la petite différence, il utilise alors les équations ci-dessus et néglige les infiniments petits d'ordre supérieur à 2 , ce qui lui fournit une relation en ε et δ . Il n'utilise pas l'égalité \approx à un infinitésimal près, mais une notion en fait équivalente à celle de l'adégalité \simeq de Fermat. La division par ε est cachée dans la définition de m !

Par exemple pour le folium de Descartes d'équation

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 ,$$

on a

$$\xi^3 + \eta^3 - 3\xi\eta = 0$$

et

$$\begin{aligned} 0 &= (\xi + \varepsilon)^3 + (\eta + \delta)^3 - 3(\xi + \varepsilon)(\eta + \delta) = \\ &= \xi^3 + 3\xi^2\varepsilon + 3\xi\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \eta^3 + 3\eta^2\delta + 3\eta\delta^2 + \delta^3 - 3\xi\eta - 3\xi\delta - 3\varepsilon\eta - 3\varepsilon\delta = \\ &= 3\xi^2\varepsilon + 3\xi\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + 3\eta^2\delta + 3\eta\delta^2 + \delta^3 - 3\xi\delta - 3\varepsilon\eta - 3\varepsilon\delta \simeq \\ &\simeq 3\xi^2\varepsilon + 3\eta^2\delta - 3\xi\delta - 3\varepsilon\eta, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\eta - \xi^2}{\eta^2 - \xi}.$$

Plus généralement si C est une courbe algébrique d'équation

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot x^k \cdot y^l = 0,$$

il vient

$$\sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot \xi^k \cdot \eta^l = 0$$

et

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot (\xi + \varepsilon)^k \cdot (\eta + \delta)^l = \\ &= \sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot \left(\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \cdot \xi^p \cdot \varepsilon^{k-p} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^l \binom{l}{q} \cdot \eta^q \cdot \delta^{l-q} \right) \simeq \\ &\simeq \sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot \left[\binom{k}{k} \xi^k \binom{l}{l} \eta^l + \binom{k}{k} \xi^k \binom{l}{l-1} \eta^{l-1} \delta + \binom{k}{k-1} \cdot \xi^{k-1} \varepsilon \binom{l}{l} \eta^l \right] = \\ &= \left(\sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot k \cdot \xi^{k-1} \cdot \eta^l \right) \cdot \varepsilon + \left(\sum_{0 \leq k+l \leq n} c_{k,l} \cdot \xi^k \cdot l \cdot \eta^{l-1} \right) \cdot \delta = \\ &= \partial_1 P(\xi, \eta) \cdot \varepsilon + \partial_2 P(\xi, \eta) \cdot \delta, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{\delta}{\varepsilon} = -\frac{\partial_1 P(\xi, \eta)}{\partial_2 P(\xi, \eta)},$$

ce qui fournit une autre preuve de la règle de Sluze.

Il donna également une démonstration du théorème fondamental de ce que nous nommons le calcul différentiel et intégral. Mais il ne le percevra pas de cette manière et c'est à Newton que reviendra le mérite d'avoir reconnu la puissance algorithmique de ce résultat.

THEOREME Si f est une fonction strictement croissante ≥ 0 et $F(x)$ désigne la surface $\text{Surf}(0, x)$ au-dessous du graphe de f entre 0 et x , alors la droite passant par les points $(\xi - \frac{F(\xi)}{f(\xi)}, 0)$ et $(\xi, F(\xi))$ ne coupe le graphe de F qu'en $(\xi, F(\xi))$.

Cette droite D est donc la tangente au graphe de F et son équation est

$$\frac{y}{x - \xi + \frac{F(\xi)}{f(\xi)}} = \frac{y - F(\xi)}{x - \xi},$$

i.e.

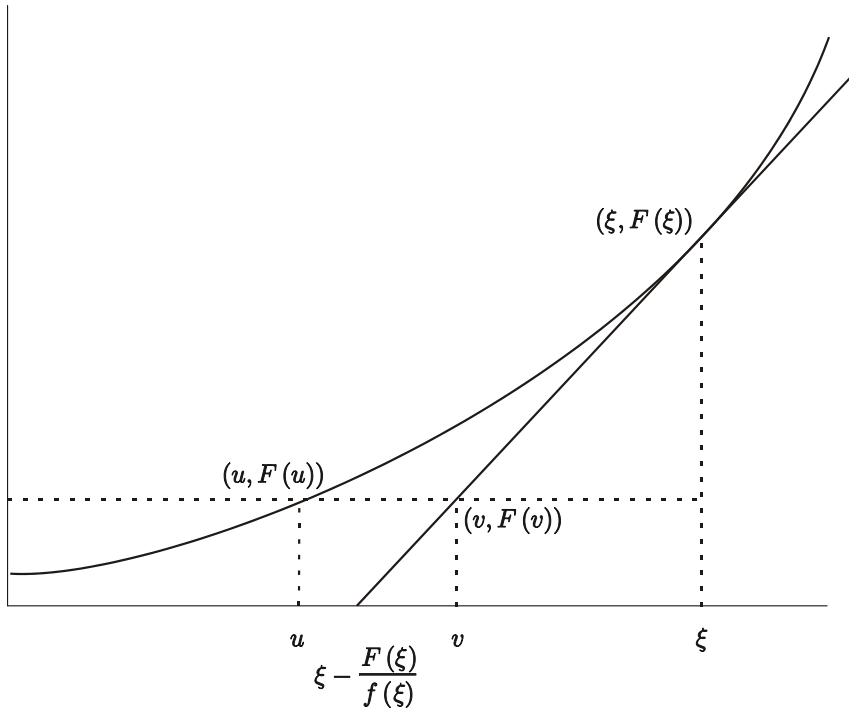
$$0 = y \cdot \frac{F(\xi)}{f(\xi)} - F(\xi) \cdot \left(x - \xi + \frac{F(\xi)}{f(\xi)}\right),$$

donc

$$y = f(\xi) \cdot x + F(\xi) - \xi \cdot f(\xi).$$

Ceci montre que la pente de cette droite est $f(\xi)$.

Pour démontrer son assertion, il considère une droite horizontale et prouve que si elle coupe le graphe de F en $(u, F(u))$ avec $u \neq \xi$ et D en $(v, F(v))$, alors $v > u$.



En effet comme

$$F(u) = f(\xi) \cdot v + F(\xi) - \xi \cdot f(\xi),$$

si $u < \xi$, on obtient

$$(\xi - v) \cdot f(\xi) = F(\xi) - F(u) = \text{Surf}(u, \xi) < (\xi - u) \cdot f(\xi)$$

puisque f est strictement croissante. On en déduit $u < v$. On procède de même si $u > \xi$. □

REMARQUE Le théorème de Barrow permet de traiter les fonctions $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotones ou constantes par morceaux et notre intuition première, pour ne pas dire enfantine, pourrait faire croire que toute fonction "raisonnable" est de ce type.

La dérivabilité en tout point ne suffit pas comme le montre l'exemple de la fonction

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ si}$$

qui est partout dérivable, de dérivée 1 en 0 et $1 + 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ en tous les autres points. Cette fonction oscille dans tout voisinage de 0 autour de id, elle est tantôt strictement croissante, tantôt strictement décroissante. La raison : elle n'est pas continûment dérivable.

Une fonction continûment dérivable n'est non-plus pas complètement "raisonnable". Puisque $\{f' \neq 0\}$ est ouvert dans J , donc une réunion dénombrable d'intervalles ouverts dans J , f est strictement monotone sur chacun de ces intervalles.

Mais que peut-on dire de $\{f' = 0\}$? Soient $C \subset [0, 1]$ un ensemble de Cantor de mesure $\delta \in [0, 1[$ et

$$g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto d(x, C) ,$$

qui est une fonction continue nulle sur C . Peut-on dire qu'une primitive de g est "raisonnable"? Certainement pas pour Barrow!