Übungen zur Vorlesung

KLASSISCHE PROBLEME DER ANALYSIS

Prof. Dr. C. Portenier

unter Mitarbeit von

Alexander Alldridge

Marburg, Sommersemester 2000

Fassung vom 29. August 2000

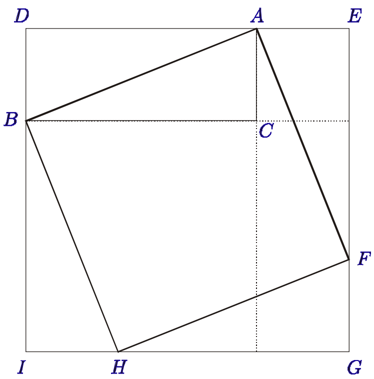
Klassische Probleme der Analysis

Blatt 1

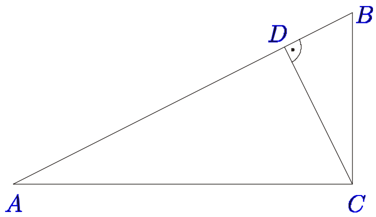
Abgabe : Freitag, 14.4.2000, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Satz von Pythagoras) Beweisen Sie den Satz von Pythagoras anhand jeder der beiden folgenden Abbildungen. Verwenden Sie zum Beweis nur die 'Sätze des Thales' und die Rechenregeln für die Grundrechenarten. (4)

(a) Hinweis: Beweisen Sie mit dem Parallelenaxiom, dass die dick gezeichnete Figur ein Quadrat ist. Die äußeren Dreiecke sind nach Konstruktion (bis auf Rotation und Translation) gleich.



(b) Hinweis: Zeigen Sie, dass die beiden kleinen Dreiecke ähnlich sind, und verwenden Sie den Strahlensatz.



Aufgabe 2 (Proportionale Verhältnisse) Zwei 'Verhältnisse' (a, b) und (c, d) natürlicher Zahlen $a, b, c, d \neq 0$ heißen *proportional* oder besser: *äquivalent*, falls es natürliche Zahlen $p, q, m, n \neq 0$ gibt, so dass (m)

$$a = mp \quad , \quad b = mq$$

und

$$c = np \quad , \quad d = nq \; ,$$

Zeigen Sie arithmetisch, dass (a, b) und (c, d) genau dann äquivalent sind, wenn

$$ad = bc \; ,$$

d.h. es gilt für die durch Sie definierten Brüche $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Können Sie die Äquivalenz/Proportionalität von (a, b) und (c, d) geometrisch interpretieren? Läßt sich die obige Äquivalenz der Charakterisierungen auch geometrisch herleiten?

Aufgabe 3 (Mittel von zwei Zahlen) Es seien $0 < a < b < c$. Man nennt b ein *Mittel* von a und c , falls (3)

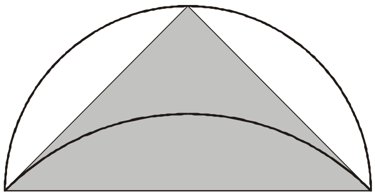
$$\left\{\frac{b-a}{c-b}, \frac{b-a}{c-a}, \frac{c-a}{c-b}\right\} \cap \left\{\frac{a}{a}, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}\right\} \neq \emptyset \ .$$

Gibt es andere Möglichkeiten, ein Mittel b durch eine Gleichung der Form

$$\frac{y-x}{z-w} = \frac{u}{v} \quad , \quad x < y \quad , \quad w < z \quad , \quad u, v, w, x, y, z \in \{a, b, c\}$$

zu charakterisieren? Die Pythagoräer haben mit Hilfe dieses Prinzips zehn verschiedene Mittel eingeführt. Welche sind dies?

Aufgabe 4 (Quadratur von Mondsicheln) Quadrieren Sie die folgende Mondsichel, d.h. stellen Sie ihre Fläche als die Fläche einer mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Figur dar. In der folgenden Abbildung ist der äußere Kreisbogen ein Halbkreis und das Dreieck gleichschenklig. (5)



Klassische Probleme der Analysis

Blatt 2

Abgabe : Mittwoch, 19.4.2000, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Proportionale Verhältnisse und reelle Zahlen) Seien (a, b) und (c, d) Paare positiver Größen. (4)

(a) Zeigen Sie, dass genau dann $(a, b) \equiv (c, d)$, d.h. diese Paare stehen in demselben Verhältnis, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Für alle ganzen positiven Zahlen m, n gilt:

$$na > mb \quad \Longleftrightarrow \quad nc > md$$

und

$$na = mb \quad \Longleftrightarrow \quad nc = md$$

und

$$na < mb \quad \Longleftrightarrow \quad nc < md \ .$$

Kann man diese Relation vereinfachen? Zeigen Sie, dass Sie eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) Versuchen Sie, die Verbindungen zwischen den 'geometrischen Größen' der Griechen und den heutigen reellen Zahlen zu präzisieren. Ordnen Sie auf geeignete Weise einem geometrischen Verhältnis (a, b) positiver (nicht notwendig ganzer!) Größen einen Dedekind'schen Schnitt $D_{(a,b)}$ zu (vgl. Analysis, Kapitel 4.7). Zeigen Sie, dass dadurch eine injektive Abbildung

$$[(a, b)] \mapsto D_{(a,b)}$$

auf den Äquivalenzklassen von Verhältnissen definiert ist, d.h., es gilt

$$(a, b) \equiv (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad D_{(a,b)} = D_{(c,d)} \ .$$

Aufgabe 2 (Eudoxos' doppelte reductio ad absurdum) Seien zwei Paare (a, b) und (c, d) positiver Größen gegeben. Zeigen Sie : Die folgenden Bedingungen sind äquivalent: (3)

(a) Es gilt $(a, b) \not\equiv (c, d)$, d.h. die Paare stehen nicht im selben Verhältnis.

(b) Es gibt ganze positive Zahlen m, n gibt, so dass

$$na > mb \quad \text{und} \quad nc \leqslant md$$

oder

$$na \leqslant mb \quad \text{und} \quad nc > md$$

oder

$$na < mb \quad \text{und} \quad nc \geqslant md$$

oder

$$na \geqslant mb \quad \text{und} \quad nc < md \ .$$

(c) Es gibt ganze positive Zahlen m, n gibt, so dass

$$na > mb \quad \text{und} \quad nc < md$$

oder

$$na < mb \quad \text{und} \quad nc > md \ .$$

Aufgabe 3 (Archimedes' Kompressions-Methode) Archimedes benutzte zur Approximation des Kreisumfangs die folgende Verbesserung der Ausschöpfungsmethode: In den Einheitskreis wird ein gleichseitiges Polygon mit n Seiten eingezeichnet, dessen Seiten Sekanten der Kreislinie sind; ferner wird um den Einheitskreis ein gleichseitiges Polygon mit n Seiten gezeichnet, dessen Seiten Tangenten der Kreislinie sind. In jedem Approximationsschritt wird die Seitenzahl der Polygone verdoppelt. (5)

(a) s_n bezeichne die Seitenlänge der Seiten inneren n-Ecks, t_n die der des äußeren n-Ecks. Zeigen Sie

$$s_n = 2 \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad t_n = 2 \tan \frac{\pi}{n} \ .$$

Hinweis: Die Polygone sind durch Dreiecke gegeben. Betrachten Sie die Winkelhalbierende dieser Dreiecke.

(b) Beweisen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen:

$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}} \quad \text{und} \quad t_{2n} = \frac{2t_n}{2 + \sqrt{4 + t_n^2}} \ .$$

Hinweis: Leiten Sie Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen den die Polygone definierenden Dreiecken her.

(c) Die Zahl π ist das Verhältnis des Kreisumfangs zum Diameter. Daher sind der halbe Umfang des inneren bzw. äußeren Polygons untere bzw. obere Schranken für π , d.h.

$$\frac{n}{2} \cdot s_n < \pi < \frac{n}{2} \cdot t_n \ .$$

Ermitteln Sie den exakten Wert von s_{10} und t_{10} ; berechnen Sie mit den Rekursionsformeln aus (ii) die sukzessiven Kantenlängen für die nächsten 6 Rekursionsschritte (so dass am Ende $10 \cdot 2^6 = 640$-Ecke betrachtet werden). Geben Sie mit Hilfe des Taschenrechners die obere bzw. untere Näherung von π im letzten Schritt bis auf 8 Nachkommastellen an. Bis auf wieviele Dezimalen haben Sie π bestimmt?

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2000

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 3

Abgabe : Mittwoch, 26.4.2000, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Eine Formel zur Kompressionsmethode) Betrachten Sie die Gleichungen (3)

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\sqrt{5}+1\right)$$

und

$$\sqrt{26+15\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(3\sqrt{3}+5\right) \quad .$$

Formulieren und beweisen sie eine allgemeine Gleichung, aus der diese Formeln folgen.

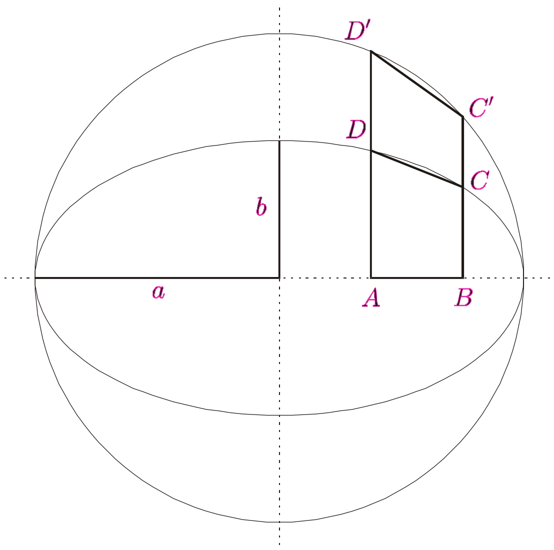
Hinweis: Setzen Sie $a = 3$, $b = 2$ bzw. $a = 26$, $b = 1$ und betrachten Sie die Terme $a+b$, $a-b$, a^2-b^2 .

Aufgabe 2 (Die Fläche einer Ellipse) Eine Ellipse mit den Halbradien a und b wird durch die Formel (5)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass ihre Fläche durch $A = \pi ab$ gegeben ist.

Hinweis: Betrachten Sie die folgende Abbildung:



Die Fläche der Ellipse wird auf die Fläche eines Kreises (mit Radius $a \geqslant b$), in den Sie eingezeichnet ist, zurückgeführt. Die Fläche des Kreises wird durch in ihn eingezeichnete gleichseitige Polygone approximiert. Die Polygone bestimmen Trapeze der Form $ABC'D'$. Dadurch ergeben sich in die Ellipse eingezeichnete Polygone und Trapeze der Form $ABCD$. Welche Beziehung besteht zwischen den Flächen von $ABCD$ und $ABC'D'$?

Aufgabe 3 (Ein Lemma zur Quadratur einer Spirale) Leiten Sie (mit Beweis) einen geschlossenen Ausdruck für die Summe (m)

$$\sum_{j=0}^{n} (a + j \cdot b)^2$$

her.

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 4

Abgabe : Mittwoch, 3.3.2000, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Kegelschnitte) Der Kegel (5)

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = r^2 \cdot x_3^2 \right\}$$

mit Radius $r > 0$ an der Höhe 1 ist durch die Gleichung

$$x \bullet Rx = 0 \quad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$$

gegeben. Die Ebene

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b \right\}$$

ist durch die Gleichung

$$a \bullet x = b \quad \text{mit} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2 \ , \ b \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \ .$$

gegeben. Wir definieren $\rho \in \mathbb{R}_+$ durch $\rho^2 = a_1^2 + a_2^2$, so dass $a_3^2 = 1 - \rho^2$. Der zu H parallele Untervektorraum H_0 ist durch die Gleichung $a \bullet x = 0$ definiert. Die Menge $C := Q \cap H$ heißt der durch H und Q definierte Kegelschnitt.

Wählen Sie entsprechend der Vorlesung $\epsilon_0 \in H$ und $\epsilon_1, \epsilon_2 \in H_0$, $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$, so dass C durch eine möglichst einfache Gleichung in den Koordinaten y_1, y_2 des Koordinatensystems $\epsilon_0 + y_1\epsilon_1$, $\epsilon_0 + y_2\epsilon_2$ gegeben ist. Interpretieren sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 2 (Ein Kriterium für Inkommensurabilität) Seien $a > b > 0$. Setze $x_0 = a$ und $x_1 = b$. Wann immer für $k \geqslant 1$ gilt, dass $x_k > 0$, sei α_k die eindeutig bestimmte positive natürliche Zahl mit $\alpha_k \cdot x_k \leqslant x_{k-1} < (\alpha_k + 1) \cdot x_k$, und setze (3)

$$x_{k+1} := x_{k-1} - \alpha_k \cdot x_k \ .$$

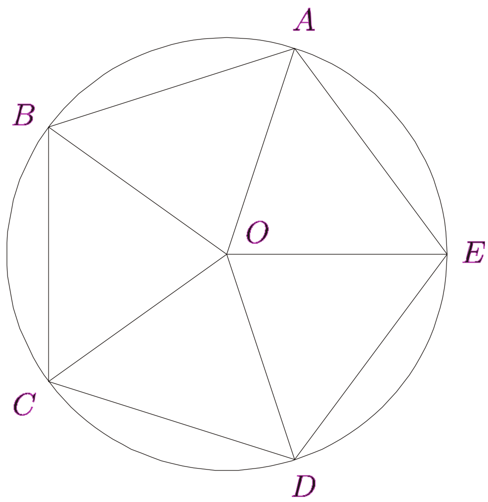
Zeigen sie: wenn die Folge (x_k) unendlich ist, sind a und b inkommensurabel. Dabei heißen die Zahlen a, b kommensurabel, wenn es $\varepsilon > 0$ und natürliche Zahlen m, n gibt, so dass

$$a = n \cdot \varepsilon \quad \text{und} \quad b = m \cdot \varepsilon \ .$$

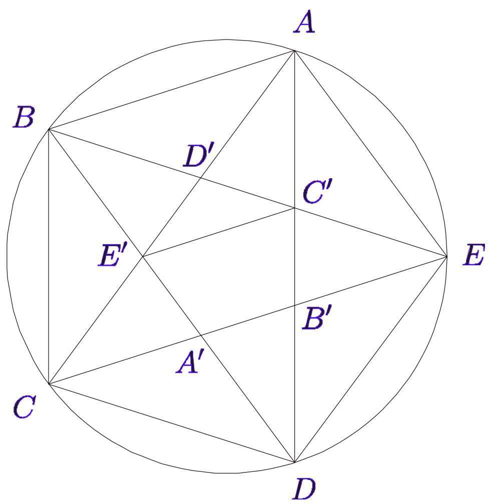
Aufgabe 3 (Seite und Diagonale des Pentagons sind inkommensurabel) Ein geschlossener Polygonzug von fünf gleichlangen Seiten, der in einen Kreis eingezeichnet ist, heißt ein Pentagon. Zeigen Sie: die Längen einer Seite und einer Diagonale eines Pentagons sind inkommensurabel. (4)

Hinweis:

(a) Zeigen sie, dass ein Pentagon gleichschenklige Dreiecke mit dem Öffnungswinkel $\frac{2\pi}{5}$ definiert. Betrachten Sie dazu die folgende Abbildung:



(b) Betrachten Sie die folgende Abbildung:



Zeigen Sie, dass die Diagonalen $AC, BD, \ldots$ gleichlang sind, und dass der Polygonzug $A'B'C'D'E'$ ein Pentagon ist.

(c) Zeigen Sie durch Betrachtung der sich ergebenden Dreiecke die folgendenen Formeln:

$$AC - AB = C'E' \quad \text{und} \quad AB - C'E' = D'E' \ ,$$

um das Kriterium aus Aufgabe 2 anzuwenden.

Klassische Probleme der Analysis

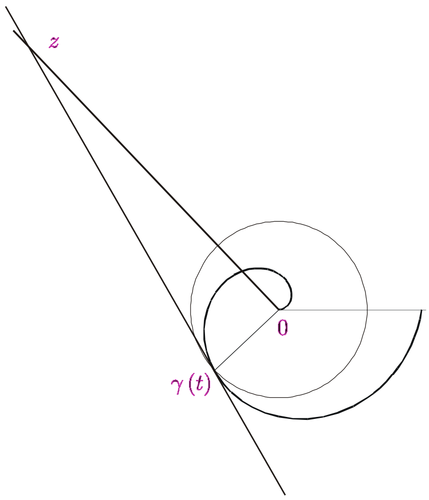
Blatt 5

Abgabe : Mittwoch, 10.3.2000, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Zur Geometrie einer Spirale) Sei γ die durch die Gleichung (4)

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto a \cdot t \cdot e^{ib \cdot t} \quad \text{mit } a, b > 0$$

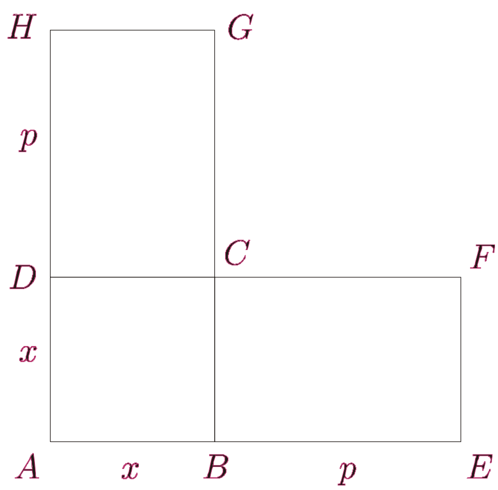
definierte Kurve. Sei $t \in \mathbb{R}_+$ und z der Schnittpunkt der Normalen in 0 zu der Verbindungsstrecke $[0, \gamma(t)]$ und der Tangente von γ in t , vgl. die untenstehende Abbildung. Bestimmen Sie mit Hilfe von Berechungen in $\mathbb{C}$ den Punkt z . Was kann man über $|z|$ sagen?



Aufgabe 2 (Al-Khwārizmī : 780 ? - 850 ?) Lösen Sie die quadratische Gleichung (4)

$$x^2 + 2 \cdot p \cdot x = q \ ,$$

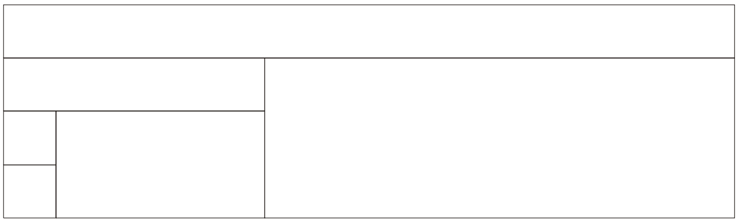
indem Sie die folgende Abbildung benutzen:



Aufgabe 3 (Al-Haitham : 965 ? - 1039 ?) Betrachten sie für $s, n \in \mathbb{N}$ die Gleichung (4)

$$(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} k^s = \sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{l} k^s \right)$$

und die Abbildung



Dabei werden in der x-Achse die k^s abgetragen und in der y-Achse 1 .

(a) Berechnen Sie die Summe $\sum_{k=1}^{n} k^4$ geschickt.

(b) Erklären Sie, warum die Abbildung die Gleichung plausibel macht.

(c) Beweisen Sie die Gleichung ohne Induktion. Der Beweis soll die der Abbildung zugrundeliegende Idee wiederspiegeln.

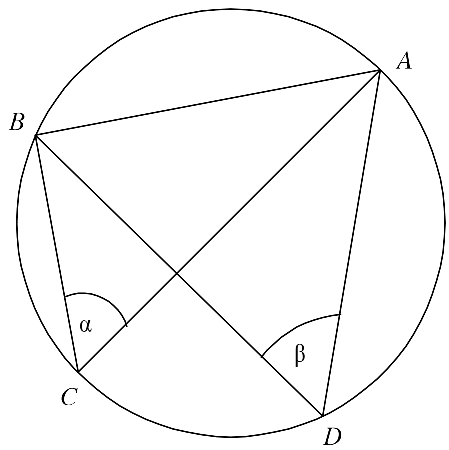
Klassische Probleme der Analysis

Blatt 6

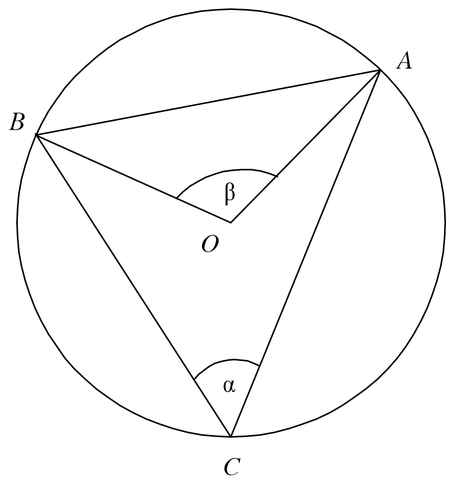
Abgabe : Mittwoch, 17.5.2000, nach der Vorlesung

Aufgabe 1 (Der Öffnungswinkel eines Kreissegments) (4)

(a) A, B seien Ecken des Segments, C, D Punkte auf der Kreislinie. Zeigen Sie geometrisch: $\alpha = \beta$.



(b) O sei Mittelpunkt, C ein Punkt auf der Kreislinie. Zeigen Sie geometrisch: $\beta = 2\alpha$.



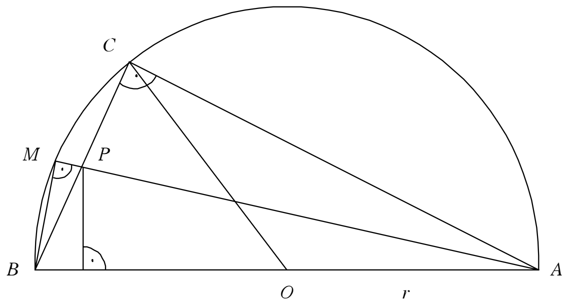
Aufgabe 2 Seien $x, u \in \mathbb{R}$ und $y, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni y + v$. Zeigen Sie: falls (2)

$$\frac{x}{y} = \frac{u}{v} \, , \quad \text{so gilt} \quad \frac{x+u}{y+v} = \frac{x}{y} \, .$$

Welche Eigenschaften von $\mathbb{R}$ haben Sie benutzt?

Aufgabe 3 (Archimedes' π-Approximation) (6)

(a) Sei s_n die Seitenlänge des gleichseitigen $6 \cdot 2^n$-Ecks im Kreis mit Radius r .



Wenn $BC = s_n$ und $BM = s_{n+1}$, bezeichne weiter $b_n = AC$ und $b_{n+1} = AM$.

Beweisen Sie geometrisch, dass $s_0 = r$, sowie die Rekursionsgleichungen

$$\frac{b_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{b_n}{s_n} + \frac{2r}{s_n} \quad \text{und} \quad \frac{(2r)^2}{s_n^2} = \frac{b_n^2}{s_n^2} + 1 \, .$$

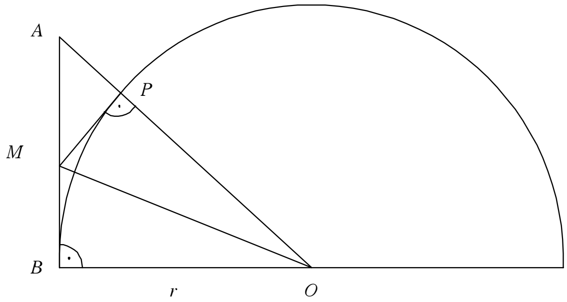
Hinweis: Die Gleichung aus Aufgabe 2 ist nützlich.

(b) Beweisen Sie mit (a), dass für den Halbkreisbogen L mit Radius r gilt

$$\frac{L}{2r} > 3 + \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} > 3 + \frac{10}{71} \, .$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\frac{(2r)^2}{s_4^2} < \frac{\left(2016\frac{1}{9}\right)^2}{66^2} + 1 < \frac{\left(2017\frac{1}{4}\right)^2}{66^2}$.

(c) Sei τ_n die *halbe* Seitenlänge des gleichseitigen $6 \cdot 2^n$-Ecks um den Kreis mit Radius r .



Seien $\tau_n = AB$, $\tau_{n+1} = MB$. Bezeichne weiter $c_n = OA$ und $c_{n+1} = OM$.

Zeigen Sie geometrisch, dass $c_0 = 2\tau_0$, sowie die Rekursiongleichungen

$$\frac{r}{\tau_{n+1}} = \frac{c_n}{\tau_n} + \frac{r}{\tau_n} \quad \text{und} \quad \frac{c_{n+1}^2}{\tau_{n+1}^2} = \frac{r^2}{\tau_{n+1}^2} + 1 \, .$$

(d) Beweisen Sie mit (c) , dass für den Halbkreisbogen L mit Radius r gilt

$$\frac{L}{2r} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{1}{7} \, .$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\frac{r}{\tau_4} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153} + \frac{2334\frac{1}{4}}{153} = \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$.

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 7

Abgabe : Mittwoch, 24.5.2000, nach der Vorlesung

Aufgabe 1 (Descartes' Kreismethode) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$. (8)

(a) Wann hat die Funktion $f - f(\xi)$ eine Nullstelle erster Ordnung in ξ ? Geben Sie zwei Charakterisierungen an und beweisen Sie deren Äquivalenz.

(b) Wenn die Funktion f differenzierbar ist, wann hat die Funktion $f - f(\xi)$ eine Nullstelle zweiter Ordnung in ξ ? Geben Sie zwei Charakterisierungen an und beweisen Sie deren Äquivalenz.

(c) Sei ein Kreis C in $\mathbb{R}^2$ gegeben, dessen Mittelpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist. Falls C den Graphen von f in $(\xi, f(\xi))$ und $(x, f(x))$ schneidet, gilt für den Radius r

$$(t-\xi)^2 + f(\xi)^2 = r^2 = (t-x)^2 + f(x)^2 \ .$$

Zeigen Sie: falls f in ξ differenzierbar ist, $f(\xi) \neq 0$ ist, und die Funktion

$$x \mapsto (t-x)^2 - (t-\xi)^2 + f(x)^2 - f(\xi)^2$$

in ξ eine Nullstelle zweiter Ordnung hat, so gilt

$$f'(\xi) = \frac{t-\xi}{f(\xi)} \ .$$

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Descartes'schen Methode die Ableitung von

$$\mathrm{id}^{\frac{3}{2}} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$$

in allen Punkten, in denen die Methode anwendbar ist.

Aufgabe 2 (Eine Anwendung der Kreismethode) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kreismethode von Descartes die Ableitung von (m)

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto e^x \ .$$

Aufgabe 3 (Eine Formel von Pascal) Beweisen Sie die Formel (4)

$$\sum_{l=1}^{j} \sum_{k=1}^{n} \binom{j+1}{l} \cdot k^l = (n+1)^{j+1} - n - 1 \quad \text{für alle } n, j \in \mathbb{N}$$

ohne Induktion!

Hinweis: Wenden Sie die binomische Summenformel auf Terme der Form

$$(k+1)^{j+1} - k^{j+1}$$

an, und benutzen Sie eine Teleskopsummation.

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 8

Abgabe : Mittwoch, 31.5.2000, nach der Vorlesung

Aufgabe 1 Seien $a > 0$ und $E \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: genau dann ist E eine Ellipse um $(0,0)$ mit Halbradius in x–Richtung a , d.h. es gibt $b > 0$, so dass E durch die Gleichung (6)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit} \quad x\,,\,y \in \mathbb{R}$$

bestimmt ist, wenn es $c \geqslant 0$ gibt, so dass E genau die Menge aller Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}$ ist, deren Summe von Abständen von $(-c,0)$ und $(c,0)$ genau gleich $2a$ ist, d.h. E ist durch die Gleichung

$$|(x,y) - (c,0)| + |(x,y) + (c,0)| = 2a \quad \text{mit} \quad x\,,\,y \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Hinweis: Die Punkte $(\pm c, 0)$ sind gerade die Brennpunkte der Ellipse. Überlegen Sie zunächst, welcher Zusammenhang zwischen a , b und c bestehen muss. Beachten Sie außerdem Blatt 3, Aufgabe 1.

Aufgabe 2 Sei $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und betrachte (6)

$$C := \{\, (x,y) \in \mathbb{R} \mid F\,(x,y) = 0 \,\} \ .$$

Falls $(x,y) \in C$ und $x \in J \subset \mathbb{R}$, $y \in I \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle sind, heißt eine injektive differenzierbare Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f\,(J) \subset I$ eine *lokale Parametrisierung* von C bei (x,y) , falls

$$C \cap (J \times I) = \operatorname{Gr} f \ , \quad \text{d.h., für alle} \quad (u,v) \in J \times I \quad \text{gilt} \quad (u,v) \in C \Leftrightarrow v = f\,(u) \ .$$

Falls f eine lokale Parametrisierung von C bei (x,y) ist, ist $f'\,(x)$ von der Wahl von f unabhängig und heißt die *Steigung* von C an (x,y) .

(a) Die Kurve C besitze an (x,y) eine lokale Parametrisierung f . Zeigen Sie: Falls $f'\,(x) = 0$, ist $\partial_1 F\,(x,y) = 0$ .Falls $\partial_1 F\,(x,y) \neq 0$, ist $\partial_2 F\,(x,y) \neq 0$, und es gilt

$$f'\,(x) = -\frac{\partial_1 F\,(x,y)}{\partial_2 F\,(x,y)} \ .$$

Hinweis: Wenden Sie die Kettenregel auf die Funktion

$$F \circ (\operatorname{id} \times f) : J \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto F\,(x, f\,(x))$$

an.

(b) Beweisen Sie mit Teil (a) die *Regel von Sluze (1673)*: Falls F eine Polynomfunktion ist, d.h., es gibt $n \in \mathbb{N}$, $(a_{k,l})_{0 \leqslant k+l \leqslant n} \subset \mathbb{R}$, so dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}$ gilt

$$F(x, y) = \sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n} a_{k,l} \cdot x^k \cdot y^l ,$$

ist die Steigung m von C im Punkte $(x, y) \in C \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ gerade

$$m = -\frac{y}{x} \cdot \frac{\widetilde{F_1}(x, y)}{\widetilde{F_2}(x, y)} ,$$

falls es bei (x, y) eine lokale Parametrisierung gibt und $F_1(x, y) \neq 0$. Dabei sind

$$\widetilde{F_1}(u, v) = \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} a_{k,l} \cdot (a + kb)\, u^k \cdot v^l \quad \text{und} \quad \widetilde{F_2}(u, v) = \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} a_{k,l} \cdot u^k \cdot (a + lb)\, v^l$$

für beliebig gewählte a , $b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 Sei C der Kreis um $(0, 0)$ mit Radius 1 . Berechnen Sie mit der Regel von Sluze die Steigung dieser Kurve an jedem ihrer Punkte in dem dies möglich ist. Was können Sie durch Wahl lokaler Parametrisierungen über $\sin'$ und $\cos'$ aussagen? (m)

Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2000

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 9

Abgabe : Mittwoch, 7.6.2000, nach der Vorlesung

Aufgabe 1 (Wallis' Interpolationsverfahren) Definiere (12)

$$a_{p,q} := \left[\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx \right]^{-1} \quad \text{für alle} \quad p\,,\, q > 0\ .$$

(a) Die *Euler'sche Betafunktion* ist definiert als

$$B\,(u,v) := \int_0^1 t^{u-1}\,(1-t)^{v-1}\,dt \quad \text{für alle} \quad u\,,\, v > 0\ .$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$\frac{1}{a_{p,q}} = p \cdot B\,(p, q+1) \quad \text{für alle} \quad p\,,\, q > 0\ .$$

(b) Zeigen Sie: Es gilt

$$\Gamma\,(v)\,\Gamma\,(v) = 2 \cdot \Gamma\,(u+v) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2u-1}\,(\sin\varphi)^{2v-1}\,d\varphi \quad \text{für alle} \quad u\,,\, v > 0\ .$$

Hinweis: Schreiben Sie $\Gamma\,(v)\,\Gamma\,(v)$ als ein Doppelintegral über dem rechten oberen Quadranten. Substituieren Sie so, dass im Integrand eine Exponentialfunktion von der Form $e^{-\left(s^2+t^2\right)}$ vorkommt. Wenden Sie dann Polarkoordinaten an.

(c) Folgern Sie aus der Formel in (b): Es gilt

$$B\,(u,v) = \frac{\Gamma\,(u)\,\Gamma\,(v)}{\Gamma\,(u+v)} \quad \text{für alle} \quad u\,,\, v > 0\ .$$

Schließen Sie daraus, dass $a_{p,q} = a_{q,p}$ für alle $p\,,\, q > 0$.

Hinweis: Benutzen Sie für den zweiten Teil die Funktionalgleichung der Gammafunktion:

$$\Gamma\,(u+1) = u \cdot \Gamma\,(u) \quad \text{für alle} \quad u > 0\ .$$

(d) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) und (c) die folgenden Rekursiongleichungen:

$$a_{p+1,q} = \frac{p+q+1}{p+1} \cdot a_{p,q} \quad \text{und} \quad a_{p+1,q+1} = a_{p+1,q} + a_{p,q+1} \quad \text{für alle} \quad p\,,\, q > 0\ .$$

Hinweis: Funktionalgleichung der Gammafunktion.

(e) Zeigen Sie mit der Definition, dass

$$a_{\frac{1}{2},1} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}\ ,$$

und folgern Sie durch Induktion mit (c) und (d) , dass

$$a_{\frac{1}{2},n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{2j+1}{2j} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

und

$$a_{\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j}{2j-1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \; .$$

(f) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$a_{\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} \leqslant a_{\frac{1}{2},n} \leqslant a_{\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}$$

und folgern Sie mit (e) die *Wallis'sche Produktformel*:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_k \prod_{j=1}^{k} \frac{4j^2}{4j^2-1} \; .$$

Aufgabe 2 (Das Folium von Descartes) Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von Sluze die Steigung des Folium von Descartes, das durch die folgende Formel definiert ist: (m)

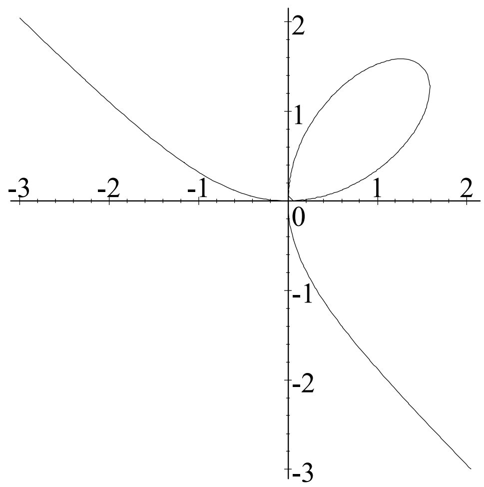
$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 \; .$$

Benutzen Sie dabei folgende Wahlen der Konstanten:

$$a = 0\,,\, b = 1 \quad \text{und} \quad a = 2\,,\, b = 1 \; .$$

Beweisen Sie elementar, dass die beiden Ausdrücke gleich sind.

Die folgende Abbildung vermittelt einen Eindruck davon, wie die Kurve aussieht:



Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

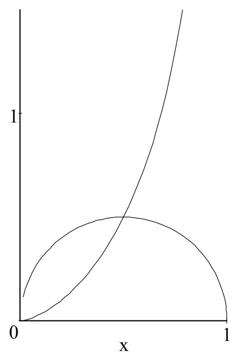
Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2000

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 10

Abgabe : Mittwoch, 14.6.2000, nach der Vorlesung

Aufgabe 1 (Die Tangente des Cissoids) Betrachten Sie die folgende Abbildung: (5)



Das *Cissoid* ist definiert als die Menge aller Punkte $(x, y) \in]0, 1[\times]0, \infty[$ mit

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{z}, \quad \text{wobei} \quad (x, z) \quad \text{ein Punkt auf dem oberen Kreisbogen}$$

des Kreises mit Durchmesser 1 und Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass der Cissoid durch die folgende Gleichung gegeben ist:

$$y = x^{\frac{3}{2}} (1 - x)^{-\frac{1}{2}} \ ;$$

folgern Sie, dass $(0, 0)$ ein Randpunkt des Cissoids ist und es die Asymptote $\{ (x, y) \mid x = 1 \}$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von infinitesimal kleinen Größen die Tangente und Subtangente des Cissoids.

Aufgabe 2 (Wallis' Quadratur des Cissoids) Gegenstand dieser Aufgabe ist die Quadratur der zwischen dem Cissoid, der x–Achse und den Vertikalen bei 0 und 1 einschlossenen Fläche. (7)

(a) Betrachte das Integral

$$a_n := \int_0^1 x^{\frac{n}{2}} (1 - x)^{\frac{1}{2}} \, dx \quad \text{für alle} \quad n \geqslant 0 \ .$$

Drücke a_n durch die Betafunktion aus und beweise mit der Formel von Aufgabenblatt 9, dass

$$a_n = \frac{n}{n + 3} \cdot a_{n-2} \quad \text{für alle} \quad n \geqslant 2 \ .$$

(b) Zeige, dass

$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot a_1 = \frac{\pi}{16} \ .$$

(c) Betrachte das Integral

$$b_n := \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} \, (1-x)^{\frac{n}{2}} \, dx \quad \text{für alle} \quad n \geqslant -1 \ .$$

Drücke b_n durch die Betafunktion aus und beweise mit der Formel von Aufgabenblatt 9, dass

$$b_n = \frac{n}{n+5} \cdot b_{n-2} \quad \text{für alle} \quad n \geqslant 1 \ .$$

(d) Drücke b_{-1} durch a_3 aus.

(e) Berechne mit (d) die Fläche des Cissoids. Bestimme, um welchen ganzen Faktor die Cissoidfläche größer als die Fläche des definierenden Halbkreises ist.

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 11

Abgabe : Mittwoch, 21.6.2000, nach der Vorlesung

Aufgabe 1 (Napiers Logarithmen) Sei $a > 0$. (7)

(a) Die differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle das AWP

$$g' = -g \quad \text{und} \quad g(0) = a \ .$$

Lösen Sie das AWP und zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine Bijektion ist. Definiere $\operatorname{Nog}_a : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{Nog}_a g(t) := a \cdot t \ .$$

Drücken Sie Nog_a durch den natürlichen Logarithmus aus.

(b) Definiere auf $\mathbb{R}_{>0}$ die Verknüpfung

$$x \star_a y := \frac{1}{a} \cdot x \cdot y \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}_{>0} \ .$$

Zeigen Sie, dass damit $(\mathbb{R}_{>0}, \star_a)$ zu einer abelschen Gruppe wird. Welches ist das neutrale Element?

(c) Zeigen Sie: $\operatorname{Nog}_a : (\mathbb{R}_{>0}, \star_a) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ ist ein Homomorphismus. Folgern Sie: Falls

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \quad \text{wobei} \quad x, x', y, y' > 0 \ ,$$

so folgt

$$\operatorname{Nog}_a x - \operatorname{Nog}_a x' = \operatorname{Nog}_a y - \operatorname{Nog}_a y' \ .$$

Aufgabe 2 (Die Vieta-Newton'sche Regel) Beschreiben Sie, etwa anhand Ihrer Unterlagen aus Analysis I o. dergl., ein Verfahren, um 'auf Papier' Quadratwurzeln zu ziehen. Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Verfahrens die Quadratwurzel der Zahl (5)

$$76\,287\,682\,055\,524 \ .$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2000

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 12

Abgabe : Mittwoch, 28.6.2000, nach der Vorlesung

Aufgabe 1 (Robervals Fehler) Sei E die Ellipse um $(0,0)$ mit den Halbradien $a, b > 0$ (8)
und den Brennpunkten $(\pm c, 0)$. Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow E \subset \mathbb{R}^2$ eine surjektive differenzierbare Kurve, die lokal injektiv ist, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gibt es ein offenes Intervall $t \in I \subset \mathbb{R}$, so dass $\gamma|_I$ injektiv ist. So ein γ soll *Parametrisierung* von E heißen.

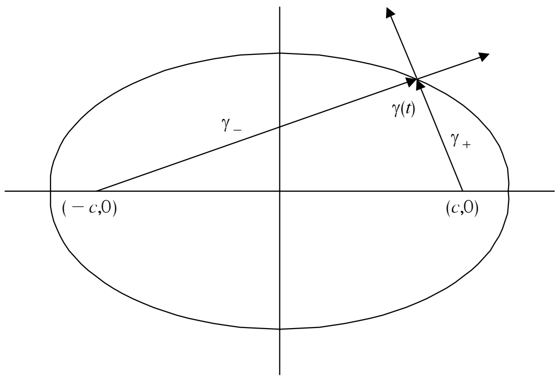
(a) Zeigen Sie: falls $\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar ist, so gilt

$$|\vartheta|' = \frac{\vartheta}{|\vartheta|} \bullet \vartheta' \ .$$

Hinweis: Es gilt $|\vartheta|^2 = \vartheta \bullet \vartheta$; leiten Sie beide Seiten dieser Gleichung ab.

(b) Schreibe

$$\gamma_{\pm} = \gamma - (\pm c, 0) \ .$$



Durch die normierten Vektoren von den Brennpunkten der Ellipse zu $\gamma(t)$ ist in diesem Punkt ein Koordinatensystem gegeben. Die Komponenten von Robervals Tangente $\mathfrak{t}(t)$ im Punkte $\gamma(t)$ sind gegeben als die Geschwindigkeit, mit der sich γ in der jeweiligen Koordinatenrichtung bewegt. Drücken Sie die Koordinatenrichtungen und -geschwindigkeiten durch $\gamma_{\pm}$ aus und folgern Sie mit (a):

$$\mathfrak{t} = \frac{\gamma_+ \bullet \gamma'}{|\gamma_+|^2} \cdot \gamma_+ + \frac{\gamma_- \bullet \gamma'}{|\gamma_-|^2} \cdot \gamma_- \ .$$

(c) Zeigen Sie, dass durch

$$\gamma(t) := (a \cos t, b \sin t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}$$

eine Parametrisierung der Ellipse gegeben ist.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\left|\gamma_{\pm}(t)\right|^2 = (a \mp c\cos t)^2 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R} \; ;$$

folgern Sie, dass

$$\left(\frac{\gamma_{\pm} \bullet \gamma'}{\left|\gamma_{\pm}\right|^2}\right)(t) = \frac{\pm c\sin t}{a \mp c\cos t} \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R} \; .$$

Bestimmen Sie damit $\mathfrak{t}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\gamma' = \gamma'_{\pm}$.

(e) Der tatsächliche Tangentialvektor an $\gamma(t)$ ist $\gamma'(t)$. Wie korrekt ist Robervals Formel?

Aufgabe 2 (Die Zwangsläufigkeit von Robervals Fehler) Sei $\mathfrak{t} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Vektor, und seien $\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \subset \mathbb{R}^2$ ein Erzeugendensystem von Einheitsvektoren. Zeigen Sie: falls (4)

$$\mathfrak{t} = (\mathfrak{t} \bullet \epsilon_1) \cdot \epsilon_1 + (\mathfrak{t} \bullet \epsilon_2) \cdot \epsilon_2 \; ,$$

so gilt $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$. Folgern Sie: es gibt keine Parametrisierung γ der Ellipse, für die Robervals Formel exakt ist.

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 13

Abgabe : Mittwoch, 5.7.2000, nach der Vorlesung

Aufgabe 1 (Newtons Reihenverfahren) Newton beschreibt das folgende Verfahren zur Lösung des AWP (für nicht alle $b_j = 0$) (7)

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j + \sum_{j=0}^{n} b_j x^j y \qquad \text{und} \qquad y(0) = 0 \;:$$

Man stelle eine Tabelle folgender Form auf:

	a_0	$+a_1 x$	$\ldots$	$+a_m x^m$
$+b_0 y$	0			
$\vdots$	0			
$+b_n x^n y$	0			
Σ	a_0			
$y =$				

Ziel ist es, eine Potenzreihenentwicklung für y zu erhalten. Man geht schrittweise wie folgt vor:

- Man summiere in der Spalte $a_j x^j$ alle Terme auf zu $c_j x^j$ und trage dies in der Summenzeile ein.
- Man trage die Stammfunktion der Summe, $+\frac{c_j}{j+1} x^{j+1}$, in der Zeile $y = \ldots$ ein.
- Man setze den neu gewonnenen Summanden für y in den Termen $b_k x^k y$ ein, und trage den sich ergebenden Wert $\frac{b_k c_j}{j+1} x^{k+j+1}$ in der Zeile für $b_k x^k y$ und der Spalte für $a_{k+j+1} x^{k+j+1}$ ein. Dabei sei $a_j = 0$ für $j \geqslant m+1$.
- Man führe dieses Verfahren fort, bis die Potenzreihenentwicklung für y bis zu einer hinreichend hohen Potenz vorliegt.

Beispielsweise ergibt sich für

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x + y + xy \qquad \text{und} \qquad y(0) = 0$$

die folgende Tabelle:

	0	x	0	0	$\dots$		
$+y$	0	$0\cdot x$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^4}{6}$	$\dots$	
$+xy$	0	0	$0\cdot x^2$	$\frac{x^3}{2}$	$\frac{x^4}{6}$	$\frac{x^5}{6}$	$\dots$
Σ	0	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{2x^3}{3}$	$\dots$		
$y =$	$0\cdot x$	$+\frac{x^2}{2}$	$+\frac{x^3}{6}$	$+\frac{x^4}{6}$	$\dots$		

(a) Lösen Sie mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens das AWP

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + x^2 + y + xy \qquad \text{und} \qquad y(0) = 0 \; .$$

Zeigen Sie, welcher Rekursionrelation die Koeffizienten c_j , die das Verfahren liefert, genügen, geben Sie die Potenzreihenentwicklung von y in moderner Notation an und weisen Sie deren gleichmäßige Konvergenz nach. Überprüfen Sie, ob sie das AWP löst. Achten Sie dabei auf Konvergenzfragen.

(b) Lösen Sie das AWP

$$f' = 1 - 3\,\mathrm{id} + \mathrm{id}^2 + (1 + \mathrm{id}) \cdot f \qquad \text{und} \qquad f(0) = 0$$

mit Variation der Konstanten. Drücken Sie das Ergebnis dabei mit Hilfe der sogenannten *Fehlerfunktion* (engl. *error function*) aus:

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds \; .$$

Aufgabe 2 (Die Behandlung negativer Potenzen) (5)

(a) Beschreiben Sie, wie das Verfahren anzuwenden ist, wenn statt nur positiver nur negative Potenzen von x in der DGL auftauchen. Wenden Sie das Verfahren auf die folgenden DGL an:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - y \qquad \text{und} \qquad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x} - y + xy \; .$$

Prüfen Sie sorgfältig, ob die Lösungen korrekt sind. Durch welche 'Anfangs'-Bedingung sind die Lösungen bestimmt?

(b) Überlegen Sie, wie das Verfahren bei gemischt positiv und negativen Potenzen anzuwenden ist, und wenden Sie es auf die folgende DGL an:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + x + y \; .$$

Überprüfen Sie die Korrektheit der Lösung und überlegen Sie, durch welche 'Anfangs'-Bedingung die Lösungen in dem gemischten Verfahren bestimmt sind.

(c) Beschreiben Sie, welche Probleme bei dem Verfahren auftreten könnten.