Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Übungen zur Vorlesung

KLASSISCHE PROBLEME DER ANALYSIS

Prof. Dr. C. Portenier

unter Mitarbeit von

Anke Raufuß

Marburg, Sommersemester 2003

Fassung vom 3. Juli 2003

Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2003

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 1

Abgabe : Mittwoch, 30.4.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Cavalieris Methode) Berechnen Sie analog zur Vorlesung (5)

$$\underset{A}{\overset{B}{S}} x^4 \quad \text{und} \quad \underset{A}{\overset{B}{S}} x^5 \ .$$

Aufgabe 2 (Fermats Methode)

(a) Seien $\xi \in \mathbb{R}$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit (1)

$$x_k \leqslant \xi \leqslant y_k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} (y_k - x_k) = 0 \ .$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = \xi \ .$$

(b) Beweisen Sie folgende Ungleichungen für $s \in \mathbb{N}^*$ und alle $n \in \mathbb{N}^*$: (3)

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^s \leqslant \frac{n^{s+1}}{s+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^s \ .$$

(c) Zeigen Sie, dass gilt: (1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{k=1}^{n} k^s = \frac{1}{s+1} \ .$$

Aufgabe 3 (Noch einmal Fermat) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}^*$: (4)

$$\sum_{k=1}^{n} \left[n^2 - k^2\right]^2 \leqslant \frac{8}{15} \cdot n^5 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[n^2 - (k-1)^2\right]^2 \ .$$

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 2

Abgabe : Mittwoch, 7.5.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Fermat an Mersenne, September 1636, Nr. 12)

Man betrachte die Folge $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Funktionen auf $\mathbb{N}$, die durch

$$P_0(n) := 1 \quad \text{und} \quad P_{k+1}(n) := \sum_{l=0}^{n} P_k(l) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

definiert sind.

(a) Zeigen Sie, dass gilt (3)

$$P_k(n) = \frac{\prod_{j=1}^{k}(n+j)}{k!} \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N} \; .$$

Hinweis : Beweisen Sie durch Induktion für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass gilt

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{k}(l+j)}{k!} = \frac{\prod_{j=1}^{k+1}(n+j)}{(k+1)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \; .$$

(b) Folgern Sie die Rekursionsformel von Fermat (1)

$$(k+1)\cdot P_{k+1}(n) = (n+1)\cdot P_k(n+1)$$

sowie

$$(n+1)\cdot P_k(n+1) = (n+k+1)\cdot P_k(n)$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie, dass (3)

$$P_{k+1}(n+1) = P_{k+1}(n) + P_k(n+1) \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N}$$

gilt. Kennen Sie eine ähnliche Formel ? Betrachten Sie die Tabelle

$$(P_k(n))_{k,n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \cdots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \cdots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & \cdots \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} .$$

Was fällt Ihnen auf ? Beweisen Sie Ihre Vermutung !

Aufgabe 2 (Die Summen von Potenzen natürlicher Zahlen)
Zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabe, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt :

(a) Archimedes, Über Spiralen, § 10 : (2)

$$3 \cdot \sum_{l=1}^{n} l^2 = n^3 + n^2 + \sum_{l=1}^{n} l \; .$$

(b) Fermat an Mersenne, September 1636, Nr. 7 : (2)

$$\sum_{l=1}^{n} l^3 = \left(\sum_{l=1}^{n} l \right)^2 \; .$$

(c) Fermat an Mersenne, September 1636, Nr. 11 : (3)

$$5 \cdot \sum_{l=1}^{n} l^4 = (4n+2) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} l \right)^2 - \sum_{l=1}^{n} l^2 \; .$$

Aufgabe 3 (Polygonalzahlen) (m)
Suchen Sie alle interessanten Formeln zu Polygonalzahlen.

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 3

Abgabe : Mittwoch, 14.5.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Das Integral von allgemeinen Hyperbeln) Seien $\gamma \in \left]1, \infty\right[$ und $a \in \mathbb{R}_+^*$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass gilt (3)

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\gamma}\, dx = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot a^{1-\gamma} ,$$

erstens ohne, zweitens mit der Lebesgueschen Theorie.

(b) Finden Sie für $\gamma = \frac{s}{t}$ mit $s, t \in \mathbb{N}^*$ und $s > t$ eine elementare Rechnung für (2)

$$\lim_{q \to 1+} \frac{q-1}{q^{1-\gamma} - 1} .$$

Hinweis : Es gilt

$$x^n - 1 = (x-1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x^j$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (Wallis' Interpolationsverfahren) Seien $p, q \in \mathbb{N}^*$.

(a) Beweisen Sie durch Induktion, dass gilt : (2)

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1} \cdot (1-t)^{q-1}\, dt = \frac{(p-1)! \cdot (q-1)!}{(p+q-1)!} .$$

(b) Folgern Sie, dass (1)

$$a_{p,q} := \left(\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx \right)^{-1} = \frac{(q+1) \cdots (q+p)}{p!}$$

gilt.

(c) Zeigen Sie: Es gilt (3)

$$\Gamma(u)\, \Gamma(v) = 2 \cdot \Gamma(u+v) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{2u-1} (\sin \varphi)^{2v-1}\, d\varphi \quad \text{für alle} \quad u\,, v > 0 .$$

Hinweis : Schreiben Sie $\Gamma(u)\,\Gamma(v)$ als ein Doppelintegral über dem rechten oberen Quadranten. Substituieren Sie so, dass im Integrand eine Exponentialfunktion von der Form $e^{-\left(s^2+t^2\right)}$ vorkommt. Wenden Sie dann Polarkoordinaten an.

(d) Man definiert die Eulersche Beta-Funktion durch (1)

$$B(u,v) := \int_0^1 t^{u-1} \cdot (1-t)^{v-1}\, dt \quad \text{für alle } u,v \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

Des weiteren sei $a_{p,q}$ für $p,q \in \mathbb{R}_+^*$ definiert durch

$$a_{p,q} := \left(\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx \right)^{-1} \ .$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$\frac{1}{a_{p,q}} = p \cdot B(p, q+1) \quad \text{für alle } p,q \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

(e) Folgern Sie aus (c), dass gilt (2)

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u) \cdot \Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \ .$$

(f) Schließen Sie aus (c) und (d), dass $a_{p,q} = a_{q,p}$ und die folgenden Rekursiongleichungen (2)

$$a_{p+1,q} = \frac{p+q+1}{p+1} \cdot a_{p,q} \quad , \quad a_{p,q+1} = \frac{p+q+1}{q+1} \cdot a_{p,q} \quad \text{und} \quad a_{p+1,q+1} = a_{p+1,q} + a_{p,q+1}$$

für alle $p,q \in \mathbb{R}_+^*$ gelten.

Hinweis : Benutzen Sie die Funktionalgleichung der Gammafunktion:

$$\Gamma(u+1) = u \cdot \Gamma(u) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 4

Abgabe : Mittwoch, 21.5.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Mercators Logarithmen) Seien $q \in]1,2[$ und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Gilt $q^n = 10$, so ist (1)

$$\log q^k = \log_{10} q^k = \frac{k}{n} \ .$$

(b) Berechnen Sie (1)

$$\left(1.005^{2^k}\right)_{k=0,\dots,9}$$

mit einem Taschenrechner auf 7 Dezimalstellen.

(c) Berechnen Sie durch geschicktes Zusammensetzen 1.005^{461} und 1.005^{462} . Es gilt (1)

$$1.005^{461} < 10 < 1.005^{462} \ .$$

(d) Bestimmen Sie durch lineare Interpolation x auf 7 Stellen, so dass (2)

$$1.005^x \simeq 10$$

gilt.

(e) Mercator wählt $n = 10^7$, weil dies (ungefähr) seiner Genauigkeit entspricht, und kann somit $\log 1.005$ bestimmen. (1)

(f) Wiederum durch geschicktes Zusammensetzen berechnen Sie 1.005^{138} und 1.005^{139} . Es gilt (1)

$$1.005^{138} < 2 < 1.005^{139} \ .$$

(g) Bestimmen Sie $\log 2$. (2)

(h) Können Sie es durch quadratische Interpolation verbessern ? (2)

Aufgabe 2 (Die Vietasche Regel) Bestimmen mit Hilfe des Verfahrens von Vieta die Quadratwurzel der Zahl (5)

$$76\,287\,682\,055\,524 \ .$$

Aufgabe 3 (Die Vieta-Newtonsche Regel) Bestimmen Sie die ersten 6 Terme der Reihenentwicklung von (4)

$$\sqrt{1+x^2} \ .$$

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 5

Abgabe : Mittwoch, 28.5.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Die Newtonsche Fluxionsregel) Seien $n \in \mathbb{N}^*$, X eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$, $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion,

$$C := \{x \in X \mid F(x) = 0\} \ ,$$

J in Intervall in $\mathbb{R}$ und $\gamma : J \longrightarrow X$.

(a) Unter welchen allgemeinen Voraussetzungen können Sie die Newtonsche Regel formulieren und beweisen ? (2)

(b) Seien $m \in \mathbb{N}$, $X \subset \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ und (2)

$$F(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|_1 \leqslant m}} c_\alpha \cdot x^\alpha \ .$$

Wie lautet jetzt die Newtonsche Regel ?

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Steigung in jedem Punkt der Kurve mit Gleichung (4)

$$y^2 = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

wie Newton.

Hinweis von Newton : Note y^t if there happen to bee in any Equation either a fraction or surde quantity ... To find in what proportion the unknowne quantitys increase or decrease doe thus. 1. Take two letters y^e one (as ξ) to signify y^t quantity, y^e other (as $\dot{\xi}$) its motion of increase or decrease : And making an Equation betwixt y^e letter ξ & y^e quantity signifyed by it, find thereby y^e valor of the other letter $\dot{\xi}$. 2. Then substituting y^e letter ξ signifying y^t quantity, into its place in y^e maine Equation esteeme y^t letter ξ as an unknowne quantity & performe y^e worke of [y^e] seaventh proposition; & into y^e resulting Equation instead of those letters ξ & $\dot{\xi}$ substitute theire valors. And soe you have y^e Equation required.

(y^t = that , y^e = the)

Aus: The mathematical papers of Isaac Newton Vol. I (1664-1666), ed. D. T. Whiteside, Cambridge University Press, 1967, p. 411 .

Aufgabe 3 Übersetzen Sie Beispiel 2 zu Problem 8 aus Newtons 'Methods of series and fluxions' (vgl. beigelegte Seite 201) in moderne Notation. (4)

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 6

Abgabe : Mittwoch, 4.6.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Eine Polynomgleichung $P(x, y) = 0$ lässt sich mit Newtons sukzessiver Approximationsmethode in eine Reihe $x = \xi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k y^k$ umformen (vgl. Beispiel auf den beigelegten Seiten 55 und 57).

(a) Berechnen Sie für (3)

$$P(x, y) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - y = 0$$

die ersten fünf Terme der Reihe mit Newtons Verfahren.

(b) Berechnen Sie für (3)

$$P(x, y) = \frac{63}{2816}x^{11} + \frac{35}{1152}x^9 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + x - y = 0$$

die ersten neun Terme der Reihe mit Newtons Verfahren.

Hinweis : Die Gleichung in (a) beschreibt $y = \log(1 + x)$ bis zur Ordnung 5 . Die Umkehrung wird folglich $x = e^y - 1$ bis zur fünften Ordnung sein. Die Gleichung in (b) beschreibt $y = \sin^{-1} x$ bis zur Ordnung 11 .

Aufgabe 2 Berechnen Sie die Flächen unter folgenden Kurven mit Hilfe der Methoden aus Newtons Problem 8 (vgl. beiliegende Seiten zu Blatt 5):

(a) $y = \frac{d \cdot x^{n-1}}{e^2 + 2ef \cdot x^n + f^2 \cdot x^{2n}}$ (3)

(b) $y = d \cdot x^{2n-1} \cdot \sqrt{e + f \cdot x^n}$ (3)

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 7

Abgabe : Mittwoch, 11.6.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Die zweite Differentialgleichung von Newton)

(a) Lösen Sie nach der Methode von Newton das Anfangswertproblem (2)

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2 y}{a^3} + \frac{x^3 y}{a^4} + \ldots \quad \text{und} \quad y = 0 \text{ in } x = 0 \; .$$

(b) Bringen Sie dieses AWP in moderne Form und lösen Sie es mit den Methoden aus Analysis II. (3)

Aufgabe 2 (Die dritte Differentialgleichung von Newton)

(a) Für das allgemeine Anfangswertproblem (2)

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \right) \cdot y + \left(\sum_{k=0}^{l} c_k x^k \right) \cdot y^2 \quad \text{und} \quad y = \eta \text{ in } x = 0$$

lässt sich nach folgender Tabelle eine Lösung $y = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ finden:

		a_0	$a_1 \cdot x$	$a_2 \cdot x^2$	$\cdots$
$b_0 \cdot y$		$b_0 \cdot d_0$	$b_0 \cdot d_1 \cdot x$	$b_0 \cdot d_2 \cdot x^2$	$\cdots$
$b_1 \cdot x \cdot y$		0	$b_1 \cdot d_0 \cdot x$	$b_1 \cdot d_1 \cdot x^2$	$\cdots$
$b_2 \cdot x^2 \cdot y$		0	0	$b_2 \cdot d_0 \cdot x^2$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
$c_0 \cdot y^2$		$c_0 \cdot d_0^2$	$2 \cdot c_0 \cdot d_0 \cdot d_1 \cdot x$	$c_0 \cdot (d_1^2 + 2 \cdot d_0 \cdot d_2) \cdot x^2$	$\cdots$
$c_1 \cdot x \cdot y^2$		0	$c_1 \cdot d_0^2 \cdot x$	$2 \cdot c_1 \cdot d_0 \cdot d_1 \cdot x^2$	$\cdots$
$c_2 \cdot x^2 \cdot y^2$		0	0	$c_2 \cdot d_0^2 \cdot x^2$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
$\sum$		$a_0 + b_0 \cdot d_0 + c_0 \cdot d_0^2$	$d_2' \cdot x$	$d_3' \cdot x^2$	$\cdots$
$\frac{x}{k+1} \cdot \sum$	$d_0 := \eta$	$d_1 \cdot x$	$d_2 \cdot x^2$	$d_3 \cdot x^3$	$\cdots$
y^2	d_0^2	$2 \cdot d_0 \cdot d_1 \cdot x$	$(d_1^2 + 2 \cdot d_0 \cdot d_2) \cdot x^2$	$(2 \cdot d_0 \cdot d_3 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2) \cdot x^3$	$\cdots$

Geben Sie die Rekursionsformel für die Koeffizienten d_k an.

(b) Lösen Sie nach der Methode von Newton das Anfangswertproblem (4)

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -3x + 3xy + y^2 - xy^2 + y^3 - xy^3 + y^4 - xy^4 + \dots$$

$$+6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4 + \dots$$

und

$$y = 0 \text{ in } x = 0 \ .$$

Geben Sie die Lösung bis zur Ordnung 7 an.

(c) Bringen Sie dieses AWP in moderne Form. (Es ist mit Hilfe elementarer Methoden aus Analysis II nicht zu lösen.) (2)

Aufgabe 3 (Eine Abwandlung der dritten Differentialgleichung von Newton)
Bringen Sie folgendes Anfangswertproblem in moderne Form und lösen Sie es: (5)

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - x + y - xy + y^2 - xy^2 + y^3 - xy^3 + y^4 - xy^4 + \dots$$

$$+2y - 2 + 4xy - 4x + 6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4 + \dots$$

und

$$y = 0 \text{ in } x = 0 \ .$$

Hinweis : Substituieren Sie $f := (1-y)^2$ und benutzen Sie die Integralexponentialfunktion

$$\mathrm{Ei}(x) := \int_x^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds \quad \text{für } x > 0 \ .$$

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 8

Abgabe : Mittwoch, 18.6.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Die Gärtnermethode) Seien $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, so dass $b \leqslant a$. Die Gleichung einer Ellipse E mit Zentrum $(0,0)$, großer Halbachse a und kleiner Halbachse b ist gegeben durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Mit

$$e := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \ .$$

bezeichnet man die *Exzentrizität*, und $F_\pm = (\pm a \cdot e, 0)$ sind die *Brennpunkte* der Ellipse.

(a) Zeigen Sie, dass die Punkte $P = (x, y)$ genau dann auf der Ellipse E liegen, wenn (3)

$$d(F_+, P) + d(P, F_-) = 2a$$

ist.

(b) Sei $L := 2a$ die Länge der großen Achse und $\varkappa := 2a \cdot e$ der Abstand zwischen den Brennpunkten der Ellipse E . Eine zweite Ellipse E' habe die Brennpunkte $(0,0)$ und $\varkappa \cdot e^{i \cdot \alpha}$ und eine große Achse derselben Länge $L > \varkappa$. Man identifiziere $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \approx \mathbb{C}^*$. Geben Sie für Punkte $r \cdot e^{i \cdot \theta}$, die auf der Ellipse E' liegen, die definierende Gleichung an. (3)

Aufgabe 2 Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$\gamma = r \cdot e^{i \cdot \varphi} : J \longrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \approx \mathbb{C}^* : t \longmapsto \gamma(t) = \gamma_1(t) + i \cdot \gamma_2(t) = r(t) \cdot e^{i \cdot \varphi(t)} \ .$$

mit $r : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\varphi, \gamma_1, \gamma_2 : J \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Sind γ_1 und γ_2 zweimal stetig differenzierbar, so sind auch r und φ zweimal stetig differenzierbar. (3)

(b) Wie beweist man ausgehend von γ die Existenz von r und φ ? (m)

Hinweis : Die Argumentfunktionen $\arg_- : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longrightarrow \left]-\pi, \pi\right[$ und $\arg_+ : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \longrightarrow \left]0, 2\pi\right[$ sind stetig.

Aufgabe 3 Es ist

$$\partial^2\gamma = \left(\partial^2 r - r\cdot(\partial\varphi)^2\right)\cdot e^{i\cdot\varphi} + \left(r\cdot\partial^2\varphi + 2\partial r\cdot\partial\varphi\right)\cdot e^{i\cdot\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} \ .$$

Die Beschleunigung besteht somit aus einem Radialanteil $\partial^2 r - r\cdot(\partial\varphi)^2$ und einem dazu orthogonalen Anteil $r\cdot\partial^2\varphi + 2\partial r\cdot\partial\varphi$. Interpretieren Sie die Terme $-r\cdot(\partial\varphi)^2$ und $2\partial r\cdot\partial\varphi$.

(a) Betrachten Sie dazu einerseits einen Punkt, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit Radius R bewegt: (2)

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^* : t \longmapsto R\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} \ .$$

(b) Betrachten Sie andererseits einen Punkt auf einer Archimedischen Spirale: (2)

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^* : t \longmapsto a\cdot t\cdot e^{ib\cdot t} \ .$$

Aufgabe 4 Lösen Sie das Planetenbahnproblem für eine Zentralkraft der Gestalt (5)

$$F(x) = -\frac{x}{|x|^4} \ .$$

Für welche Anfangsbedingungen hat die Bahnparametrisierung eine "schöne" Form?

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 9

Abgabe : Mittwoch, 2.7.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Lösen Sie das Planetenbahnproblem für eine Zentralkraft der Gestalt (4)

$$F(x) = -\frac{x}{|x|^6}$$

mit den Anfangsbedingungen $r(0) = 1$, $\partial r(0) = 0$ und $\partial\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2m}}$.

Aufgabe 2 Gegeben sind ein Kegel Q und eine Ebene H , deren Kegelschnitt eine Ellipse $C = Q \cap H$ ergibt. Eine Sphäre S liege tangential zum Kegel Q und zur Ebene H , d.h. Sphäre und Kegel berühren sich in einem Kreis, Sphäre und Ebene in einem Punkt. (6)

Zeigen Sie: Der Schnittpunkt von S und H ist ein Brennpunkt B der Ellipse C .

Aufgabe 3 Die Ebene G des Berührkreises der Sphäre mit dem Kegel Q schneidet die Ebene H in einer Geraden L . Ist e die Exzentrizität der Ellipse, so gilt (4)

$$d(P, B) = e \cdot d(P, L) \quad \text{für alle } P \in C \ .$$

Klassische Probleme der Analysis

Blatt 10

Abgabe : Mittwoch, 9.7.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Harmonisches Dreieck von Leibniz) Gegeben ist die Folge $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Funktionen auf $\mathbb{N}$, die durch (5)

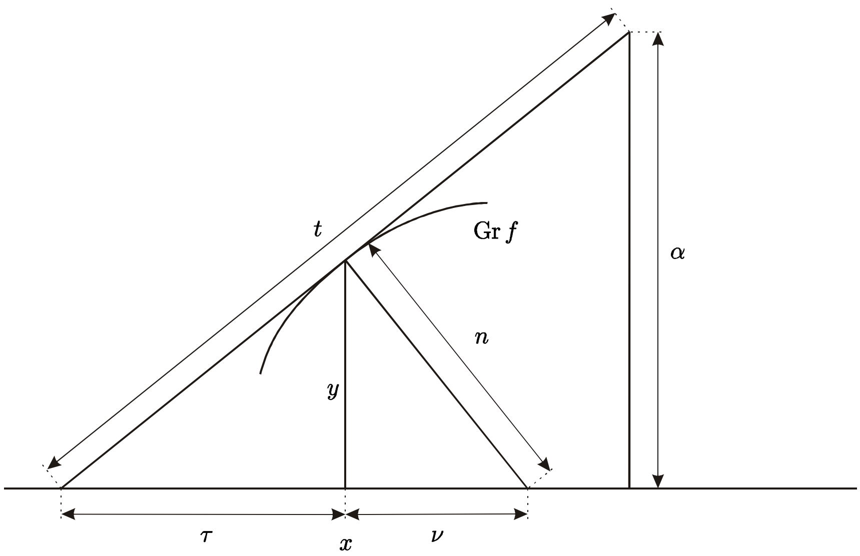
$$P_0(n) := 1 \quad \text{und} \quad P_{k+1}(n) := \sum_{l=0}^{n} P_k(l) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

definiert sind (vgl. Blatt 2, Aufgabe 1).

Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_k(n)} \quad \text{für } k \geqslant 2 \ .$$

Aufgabe 2 (Charakteristisches Dreieck von Leibniz) Gegeben sei der Graph einer Funktion f und $\alpha > 0$ fest. Für einen Punkt (x, y) auf dem Graphen von f kann man folgendes Dreieck konstruieren: (3)



Dabei heißt t die Tangente an den Graphen von f im Punkt (x, y), τ die Subtangente, n die Normale und ν die Subnormale.

Finden Sie durch elementare geometrische Überlegungen alle Formeln, die t, τ, n, ν und y verbinden. Drücken Sie alle in Abhängigkeit von τ und y aus.

Aufgabe 3 (Leibnizsche Formeln für die Parabel) Für die allgemeine Parabel $f : x \longmapsto x^r$ mit $r > 0$ gilt im zugehörigen charakteristischen Dreieck $\tau = \frac{x}{r}$. (4)

Berechnen Sie mit Hilfe der Leibnizschen Formeln

$$\int y\, ds \quad \text{und} \quad \int ds \quad \text{zwischen 0 und } a$$

zunächst für den Fall $r = \frac{1}{2}$ und verallgemeinern Sie dann (falls möglich).

Aufgabe 4 (Leibniz heute) Schreiben Sie $\int y\, ds$ und $\int ds$ in moderner Form. (2)