

Fachbereich Mathematik und Informatik  
Philipps-Universität Marburg



# REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES

Claude Portenier

Marburg, semestre d'hiver 2006/07



# TABLE DES MATIÈRES

<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>iii</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>v</b>
<b>1 LA THÉORIE DE CHOQUET</b>	<b>1</b>
1.1 Le théorème de Hahn-Banach . . . . .	2
1.2 Ensembles convexes compacts de dimension finie . . . . .	7
1.3 Ensembles convexes compacts dans un espace localement convexe . . . . .	10
1.4 Le théorème de Choquet-Bishop-de Leeuw . . . . .	16
1.5 Principe du minimum de Bauer . . . . .	21
1.6 Espaces vectoriels de fonctions continues réelles . . . . .	25
1.7 Espaces vectoriels et algèbres de fonctions continues complexes . . . . .	27
<b>2 ANALYSE HARMONIQUE SUR UN MONOÏDE DISCRET</b>	<b>29</b>
2.1 Monoïdes, caractères et fonctions exponentielles . . . . .	30
2.2 Le dual restreint d'un cône convexe de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	36
2.3 Théorème de Hausdorff-Bernstein-Widder . . . . .	42
2.4 Fonctions de type positif . . . . .	47

## TABLE DES MATIÈRES

2.5	Fonctions relativement de type positif . . . . .	55
2.6	Fonctions de type positif exponentiellement bornées sur un monoïde involutif . . . . .	60
2.7	Fonctions de type positif sur un monoïde involutif . . . . .	71
2.8	Le monoïde $\mathbb{N}^n$ et le problème des moments . . . . .	77
	Le cas du monoïde $\mathbb{N}$ . . . . .	77
	Le cas du monoïde $\mathbb{N}^n$ pour $n \geq 1$ , muni de l'involution $\text{id}_{\mathbb{N}^n}$ . . . . .	78
	Le cas du monoïde $\mathbb{N}^2$ , muni de l'involution $\% : (k_1, k_2) \mapsto (k_2, k_1)$ . . . . .	82
2.9	Fonctions relativement de type positif sur un monoïde involutif . . . . .	84
2.10	La formule de Lévy-Khintchine . . . . .	88

# BIBLIOGRAPHIE

Version du 22 février 2007

- [Alf 1971] E.M. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 57, Springer, 1971.
- [And 1970] P.R. Andenaes, *Hahn-Banach extensions which are maximal on a given cone*, Math. Ann. 188 (1970), p. 90-96, MR 41 (1971), #8954.
- [AngPor 1990] Bernd Anger, Claude Portenier, *Radon integrals and Riesz representation*, Measure theory, Oberwolfach 1990, Rend. Cir. Mat. Palermo (2) Suppl. 28 (1992), p. 269-300.
- [AngPor 1992] —, *Radon Integrals*, Progress in Mathematics, vol. 103, Birkhäuser, 1992.
- [AreSin 1954] R. Arens and I.M. Singer, *Function values as boundary integrals*, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), p. 735-745.
- [Ban 1929] Stefan Banach, *Sur les fonctionnelles linéaires II*, Stud. Math. 1 (1929), p. 223-239.
- [Bau 1957] Heinz Bauer, *Sur le prolongement des formes linéaires positives dans un espace vectoriel ordonné*, C.R. Acad. Sci. Paris 244 (1957), p. 289-292.
- [Bau 1958] —, *Minimalstellen von Funktionen und Extrempunkte*, Arch. Math. 9 (1958), p. 389-393.
- [Bau 1960] —, *Minimalstellen von Funktionen und Extrempunkte II*, Arch. Math. 11 (1960), p. 200-205.
- [Bau 1961] —, *Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem*, Ann. Inst. Fourier, 11 (1961), p. 89-136.
- [Bau 1963/64] —, *Konvexität in topologischen Vektorräumen*, Vorlesung im WS 1963/64 an der Universität Hamburg ausgearbeitet von Ulrich Krause.
- [BeChJe 1979] Christian Berg, Jens Peter Reus Christensen, C.U. Jensen, *A remark on the multidimensional moment problem*, Math. Ann. 243 (1979), p. 163-169.

## BIBLIOGRAPHIE

- [BeChRe 1984] Christian Berg, Jens Peter Reus Christensen, Paul Ressel, *Harmonic Analysis on semigroups, Theory of positive definite and related functions*, Springer, 1984.
- [Bis 1959] Errett Bishop, *A minimal boundary for function algebras*, Pacific J. Math. 9 (1959), p. 629-642.
- [BisLee 1959] Errett Bishop and Karel de Leeuw, *The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points*, Ann. Inst. Fourier 9 (1959), p. 305-331.
- [Bou 1970] Nicolas Bourbaki, *Algèbre, chap. 1 à 3*, Hermann, Paris 1970.
- [Bou 1974] Nicolas Bourbaki, *Topologie générale, chapitres 5 à 10*, Hermann, Paris 1974.
- [Bou 1981] Nicolas Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, chapitres 1 à 5*, Paris, 1981.
- [Buc 1986] Henri Buchwalter, *Les fonctions de Lévy existent!*, Math. Ann. 274 (1986), p. 31-34.
- [Cho 1956a] Gustave Choquet, *Unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes réticulés*, C. R. Acad. Sci. Paris 243 (1956), p. 555-557.
- [Cho 1956b] —, *Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 243 (1956), p. 699-702.
- [Cho 1956c] —, *Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris 243 (1956), p. 736-737.
- [Cho 1956/57] —, *Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes*, Sémin. Bourbaki (1956/57), exp. no. 139.
- [Cho 1960] —, *Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts*, Ann. Inst. Fourier 10 (1960), p. 333-344.
- [Cho 1962] —, *Le problème des moments*, Sémin. Choquet 1er année (1962), exp. no. 4.
- [Cho 1969] —, *Deux exemples classiques de représentation intégrale*, Enseignement Math. 15 (1969), p. 63-75.
- [ChoMey 1963] Gustave Choquet et Paul-André Meyer, *Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques*, Ann. Inst. Fourier 13.1 (1963), p. 139-154.
- [DanGrüKle 1962] Ludwig Danzer, Branko Grünbaum and Victor L. Klee, *Helly's theorem and its relatives*, Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 7, Convexity, Amer. Math. Soc. (1962), p. 101-180.
- [Dix 1964] Jacques Dixmier, *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [Edw 1965] D.A. Edwards, *Choquet boundary theory for certain spaces of lower semicontinuous functions*, F. Birtel (ed.), Proc. Tulane Conf. on Function Algebras (1965), Scott, Foresman and Co., 1966, p. 300-309.
- [God 1963] Roger Godement, *Cours d'algèbre*, Hermann, 1963.
- [GonMer 1965] A.A. Gonchar and S.N. Mergelyan, *Uniform approximation by analytic and*

- harmonic functions*, Contemporary problems in the theory of analytic functions, International conference on the theory of analytic functions, Erevan, 1965, p. 94-101.
- [Har 1906] F. Hartogs, *Zur Theorie des analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten*, Math. Ann. 62 (1906), p. 1-88.
- [Hah 1927] Hans Hahn, *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räume*, J. Reine Angew. Math. 157 (1927), p. 214-229.
- [Hel 1912] E. Helly, *Über lineare Funktionaloperationen*, Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien, Math.-natw. Kl. Abt. IIa 121 (1912), p. 265-297.
- [Her 1961] Michel Hervé, *Sur les représentations intégrales à l'aide des points extrémaux dans un ensemble compact convexe métrisable*, C. R. Acad. Sci. Paris 253 (1961), p. 366-368.
- [Jen 1899] J.L.W.V. Jensen, *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions*, Acta Math. 22 (1899), p. 359-364.
- [Kle 1959] Victor L. Klee, *Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces*, Math. Ann. 139 (1959), p. 51-63.
- [LinOlsSte 1978] Joram Lindenstrauss, Gunnar H. Olsen and Y. Sternfeld, *The Poulsen simplex*, Ann. Inst. Fourier 28.1 (1978), p. 91-114.
- [Mer 1952] S.N. Mergelyan, *Uniform approximation to functions of a complex variable*, Uspehi Mat. Nauk 7 (1952), p. 31-122; Amer. Math. Soc. Transl., Ser. I, vol. 3, p. 294-391.
- [Mok 1962a] G. Mokobodzki, *Principe du balayage, principe de domination*, Sémin. Choquet, 1er année (1962), exp. no. 1.  
C'est la rédaction développée de : *Balayage défini par un cône convexe de fonctions numériques sur un espace compact*, C. R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), p. 803-805.
- [Mok 1962b] *Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (s.c.i. ou s.c.s.) sur un ensemble convexe compact*, Sémin. Brelot-Choquet-Deny, 6e année, no. 2, exp. no. 9.
- [ParRaoVar 1963] K.R. Parthasarathy, R.R. Rao and S.R.S. Varadhan, *Probability distributions on locally compact abelian groups*, Illinois Math. J. 7 (1963), p. 337-369.
- [Phe 1966] Robert R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, Mathematical Studies no. 7, Van Nostrand, 1966 ou bien Lecture Notes in Mathematics, no. 1757, 2<sup>e</sup> éd., Springer, 2001.
- [Por AF] Claude Portenier, *Cours d'Analyse fonctionnelle*, <http://www.mathematik.uni-marburg.de/~portenier>, Marburg, 2005.
- [Por AN] Claude Portenier, *Cours d'Analyse*, <http://www.mathematik.uni-marburg.de/~portenier>, Marburg, 2006.
- [Pou 1959] Ebbe Thue Poulsen, *Convex sets with dense extreme points*, Amer. Math. Monthly 66 (1959), p. 577-578.

## BIBLIOGRAPHIE

- [RiF 1914] Frédéric Riesz, *Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 31 (1914), p. 9-14.
- [RiM 1923] Marcel Riesz, *Sur le problème des moments. Troisième Note*, Ark. Mat., Astr. o Fys. 17 (1923), no. 16.
- [Sch 1938a] Isaac J. Schoenberg, *Metric spaces and completely monotone functions*, Ann. of Math. 39 (1938), p. 811-841.
- [Sch 1938b] — , *Metric spaces and positive definite functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 522-536.
- [Wid 1946] David Vernon Widder, *The Laplace transform*, Princeton Univ. Press, 1946.