# Chapitre 1

# LA THÉORIE DE CHOQUET

La motivation principale conduisant à la recherche d'une représentation intégrale est ce que les physiciens appelle le *principe de superposition* , essentiel en mécanique quantique. Mathématiquement on peut simplement parler d'une linéarité généralisée au sens suivant :

Si $G$ est un espace localement convexe séparé et si un élément $\gamma \in G$ peut se décomposer sous la forme

$$\gamma = \int \theta \, d\mu(\theta) \ ,$$

où $\mu$ est une intégrale de Radon sur $G$ , alors pour toute application linéaire continue $T : G \longrightarrow H$ dans un autre espace localement convexe séparé, on a

$$T\gamma = \int T\theta \, d\mu(\theta) \ ,$$

pour toute notion d'intégration raisonnable à valeurs dans un espace localement convexe. Tout le problème est de trouver des intégrales de Radon $\mu$ faisant intervenir des éléments $\theta$ simples bien connus !

Version du 18 décembre 2006

## 1.1 Le théorème de Hahn-Banach

J'ai rassemblé dans ce paragraphe les quelques résultats liés au théorème de Hahn-Banach dont nous aurons besoin.

**Soit $F$ un espace vectoriel réel.**

**DÉFINITION** $\mathcal{SL}(F)$ , resp. $\widetilde{\mathcal{SL}}(F)$ , désigne l'ensemble des formes sous-linéaires $p : F \longrightarrow \mathbb{R}$ , resp. des fonctionnelles sous-linéaires $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ , donc telles que

$$p(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot p(\varphi) \quad \text{et} \quad p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi, \psi \in F$ .

Si $(q_j)_{j \in J} \subset \widetilde{\mathcal{SL}}(F)$ , on pose

$$\bigwedge_{j \in J} q_j(\varphi) := \inf_{(\varphi_j)_{j \in J} \in F^{(J)}, \sum_{j \in J} \varphi_j = \varphi} \sum_{j \in J} q_j(\varphi_j) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Si $X$ est un ensemble, $A$ une partie de $X$ et $f : A \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ , on désigne par $f^\infty$ la fonction sur $X$ obtenue en prolongeant $f$ par $\infty$ hors de $A$ . On écrit $q_1 \wedge q_2$ à la place de $\bigwedge_{j \in \{1,2\}} q_j$ .

**PROPOSITION** *Soient $p \in \mathcal{SL}(F)$ et $(q_j)_{j \in J} \subset \widetilde{\mathcal{SL}}(F)$ .*

*(i)* *On a $p \leqslant q_j$ pour tout $j \in J$ si, et seulement si, $p \leqslant \bigwedge_{j \in J} q_j$ .*

*(ii)* *Si $-\infty < \bigwedge_{j \in J} q_j < \infty$ sur $F$ , alors $\bigwedge_{j \in J} q_j \in \mathcal{SL}(F)$ .*

*(iii)* *On a*

$$-p(-\varphi) \leqslant p(\varphi) \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \ .$$

*(iv)* *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(a)* *$p$ est linéaire.*

*(b)* *$p$ est minimale dans $\mathcal{SL}(F)$ par rapport à $\leqslant$ , i.e.*

$$q \in \mathcal{SL}(F) \ \textit{ et } q \leqslant p \quad \Longrightarrow \quad q = p \ .$$

*(c)* *Pour tout $\varphi \in F$ , on a*

$$p(\varphi) = -p(-\varphi) \ .$$

**Démonstration de (i)** En effet on a

$$0 = 0 \cdot p(0) = p(0) = p(\varphi - \varphi) \leqslant p(\varphi) + p(-\varphi) \ .$$

**Démonstration de (ii)** Cette assertion est importante, puisqu'elle ramène un problème à plusieurs inégalités (même une infinité!) à un problème à une seule inégalité. Etant donné $\varphi \in F$ et $\left(\varphi_j\right)_{j\in J} \in F^{(J)}$ tels que $\sum_{j\in J} \varphi_j = \varphi$ , si pour tout $j \in J$ , on a $p \leqslant q_j$ , alors

$$p(\varphi) = p\left(\sum_{j\in J} \varphi_j\right) \leqslant \sum_{j\in J} p\left(\varphi_j\right) \leqslant \sum_{j\in J} q_j\left(\varphi_j\right) \ ,$$

donc $p(\varphi) \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi)$ en passant à l'infimum. Réciproquement étant donné $k \in J$ , on a

$$p(\varphi) \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi) \leqslant q_k(\varphi)$$

en considérant la famille $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}$ définie par

$$\varphi_j := \begin{cases} \varphi & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ .$$

**Démonstration de (iii)** Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in F$ , on a tout d'abord

$$\bigwedge_{j\in J} q_j(\alpha\cdot\varphi) = \inf_{\left(\varphi_j\right)_{j\in J}\in F^{(J)}, \sum_{j\in J}\varphi_j = \alpha\cdot\varphi} \sum_{j\in J} q_j\left(\varphi_j\right) =$$

$$= \alpha\cdot\inf_{\left(\varphi_j\right)_{j\in J}\in F^{(J)}, \sum_{j\in J}\frac{\varphi_j}{\alpha} = \varphi} \sum_{j\in J} q_j\left(\frac{\varphi_j}{\alpha}\right) = \alpha\cdot\bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi) \ .$$

On en déduit que

$$-\infty < \bigwedge_{j\in J} q_j(0) = \bigwedge_{j\in J} q_j(2\cdot 0) = 2\cdot\bigwedge_{j\in J} q_j(0) \leqslant 0 \ ,$$

donc $\bigwedge_{j\in J} q_j(0) = 0$ . Finalement, pour tout $\varphi,\psi \in F$ et $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}, \left(\psi_j\right)_{j\in J} \subset F^{(J)}$ tels que $\sum_{j\in J}\varphi_j = \varphi$ et $\sum_{j\in J}\psi_j = \psi$ , il vient $\sum_{j\in J}\left(\varphi_j + \psi_j\right) = \varphi + \psi$ , donc

$$\bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi+\psi) \leqslant \sum_{j\in J} q_j\left(\varphi_j+\psi_j\right) \leqslant \sum_{j\in J} q_j\left(\varphi_j\right) + \sum_{j\in J} q_j\left(\psi_j\right)$$

et par suite

$$\bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi+\psi) \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi) + \bigwedge_{j\in J} q_j(\psi) \ ,$$

ce qui montre que $\bigwedge_{j\in J} q_j$ est sous-additive.

**Démonstration de (iv)**

**(a) $\Rightarrow$ (b)** Par (i) appliqué à $q$ , pour tout $\varphi \in F$ , on obtient

$$-q(\varphi) \leqslant q(-\varphi) \leqslant p(-\varphi) = -p(\varphi) \ ,$$

ce qui montre que $p \leqslant q$ , donc que $q = p$ .

**(b) $\Rightarrow$ (c)** Si $p$ est minimale, pour tout $\psi \in F$ , il suffit de considérer la forme linéaire $\tau : \mathbb{R}\cdot\psi \longrightarrow \mathbb{R} : \alpha\cdot\psi \longmapsto -\alpha\cdot p(-\psi)$ , ainsi que

$$q := p\wedge\tau^\infty : \varphi \longmapsto \inf_{\alpha\in\mathbb{R}_+}\left[p(\varphi-\alpha\cdot\psi) - \alpha\cdot p(-\psi)\right] : F \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

On vérifie facilement qu'elle est sous-linéaire, car elle ne prend évidemment pas la valeur $\infty$ , ni $-\infty$ , puisque

$$p(\varphi-\alpha\cdot\psi) - \alpha\cdot p(-\psi) = p(\varphi-\alpha\cdot\psi) - p(\varphi-\alpha\cdot\psi-\varphi) \geqslant$$

$$\geqslant p(\varphi - \alpha \cdot \psi) - p(\varphi - \alpha \cdot \psi) - p(-\varphi) \geqslant -p(-\varphi) > -\infty \ .$$

Mais comme $q \leqslant p$ , on a $q = p$ par la minimalité de $p$ . On en déduit, en prenant $\alpha = 1$ et $\varphi = \psi$ dans la définition, que

$$p(\psi) = q(\psi) \leqslant -p(-\psi) \leqslant p(\psi)$$

grâce à (i). Nous avons donc prouvé que $p(\psi) = -p(-\psi)$ .

**(c) ⇒ (a)** La condition entraîne immédiatement l'homogénéité de $p$ . Pour tout $\varphi, \psi \in F$ , on a alors

$$p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi) = p(\varphi) + p(\varphi + \psi - \varphi) \leqslant$$

$$\leqslant p(\varphi) + p(\varphi + \psi) + p(-\varphi) = p(\varphi + \psi) \ ,$$

donc l'additivité. Ceci finit de prouver que $p$ est linéaire. □

**THÉORÈME** *Pour toute forme sous-linéaire p sur l'espace vectoriel $F$ , il existe une forme linéaire $\mu$ sur $F$ telle que $\mu \leqslant p$ .*

*En particulier on obtient le* ***principe d'Orlicz*** *: Soit $(q_j)_{j \in J}$ est une famille de fonctionnelles sous-linéaires sur l'espace vectoriel $F$ telle que $\bigwedge_{j \in J} q_j < \infty$ sur $F$ . Pour qu'il existe une forme linéaire $\mu$ sur $F$ telle que*

$$\mu \leqslant q_j \quad \textit{pour tout } j \in J \ ,$$

*il faut et il suffit que*

$$-\infty < \bigwedge_{j \in J} q_j \quad \textit{sur } F \ .$$

Par le principe de maximalité de Hausdorff, il existe une chaîne maximale $P \subset \mathcal{SL}(F)$ contenant $p$ . Pour tout $q \in P$ telle que $q \leqslant p$ et $\varphi \in F$ , on a

$$q(\varphi) \geqslant -q(-\varphi) \geqslant -p(-\varphi) > -\infty \ ,$$

et on vérifie facilement que $\mu := \inf P \in \mathcal{SL}(F)$ est minimale, donc linéaire par la proposition (iv).

Le principe d'Orlicz est alors une conséquence de la proposition (ii). □

**COROLLAIRE 1 (Théorème de Hahn-Banach sur $\mathbb{R}$ [Hah 1927], [Ban 1929])**

*Soient $E$ un sous-espace vectoriel de $F$ et $\tau : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\tau \leqslant p$ sur $E$ . Alors il existe une forme linéaire $\mu$ sur $F$ qui prolonge $\tau$ et telle que $\mu \leqslant p$ .*

*En particulier pour tout $\psi \in F$ et $a \in [-p(-\psi), p(\psi)]$ , il existe une forme linéaire $\mu$ sur $F$ telle que $\mu(\psi) = a$ . On a donc*

$$p = \sup\nolimits_{\mu \in F^*, \mu \leqslant p} \mu \ .$$

Il suffit de considérer la forme sous-linéaire

$$\tau^\infty \wedge p : \varphi \longmapsto \inf\nolimits_{\psi \in E} \left[\tau(\psi) + p(\varphi - \psi)\right] \ .$$

Pour la seconde partie il suffit de constater que la forme linéaire

$$\tau : \mathbb{R} \cdot \psi \longrightarrow \mathbb{R} : \alpha \cdot \psi \longmapsto \alpha \cdot a$$

satisfait à

$$\tau(\alpha \cdot \psi) = \alpha \cdot a \leqslant \alpha \cdot p(\psi) = p(\alpha \cdot \psi) \quad \text{et} \quad \tau(-\alpha \cdot \psi) = -\alpha \cdot a \leqslant \alpha \cdot p(-\psi) = p(-\alpha \cdot \psi)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . □

Soient $(F, \leqslant)$ un espace vectoriel ordonné, $F_+$ le cône des éléments positifs, $E$ un sous-espace vectoriel de $F$ et $\tau : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Considérons

$$\left(0_{F_-}\right)^{\infty} : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}} : \varphi \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & & \varphi \in F_- \\ & \text{si} & \\ \infty & & \varphi \notin F_- \end{array} \right. .$$

Cette fonctionnelle est sous-linéaire et une forme linéaire $\mu$ sur $F$ est positive si, et seulement si, on a $\mu \leqslant \left(0_{F_-}\right)^{\infty}$ . Ainsi pour qu'une forme linéaire $\mu$ sur $F$ soit positive et prolonge $\tau$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu \leqslant \tau^{\infty} \wedge \left(0_{F_-}\right)^{\infty} .$$

Mais

$$\tau^* (\varphi) := \tau^{\infty} \wedge \left(0_{F_-}\right)^{\infty} (\varphi) = \inf \{\tau (\psi) \ | \ \psi \in E \text{ tel que } \varphi \leqslant \psi\}$$

est infinie hors de $E + F_- = E - F_+$ . Remarquons que $\tau$ est positive pour l'ordre induit par $F$ sur $E$ est une condition nécessaire pour l'existence d'une telle forme linéaire $\mu$ .

**COROLLAIRE 2 (Prolongement d'une forme linéaire positive)**
*Soient $E$ un sous-espace vectoriel de $F$ et $\tau : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire.*

*(i) Si $\tau$ est positive et $E$ est* cofinal *dans $F$ , i.e. $E - F_+ = F$ , alors il existe une forme linéaire positive $\mu$ sur $F$ qui prolonge $\tau$ .*

*(ii) H. Bauer* [Bau 1957] *Si $p$ est une forme sous-linéaire, alors il existe une forme linéaire positive $\mu$ sur $F$ qui prolonge $\tau$ telle que $\mu \leqslant p$ si, et seulement si, on a*

$$\tau^* \geqslant -p(-\diamond) .$$

**Démonstration de (i)** Comme $\tau^* < \infty$ par ce qui précède, grâce au principe d'Orlicz il nous suffit de montrer que $\tau^* > -\infty$ sur $F$ . Mais pour tout $\varphi \in F$ , il existe $\theta \in E$ tel que $\theta \geqslant -\varphi$ et, pour tout $\psi \in E$ tel que $\psi \geqslant \varphi$ , il vient $\psi \geqslant -\theta$ et par suite $\tau(\psi) \geqslant \tau(-\theta)$ puisque $\tau$ est croissante, donc $\tau^*(\varphi) \geqslant \tau(-\theta) > -\infty$ .

**Démonstration de (ii)** On est conduit au problème

$$\mu \leqslant \tau^{\infty} \wedge \left(0_{F_-}\right)^{\infty} \wedge p .$$

Mais

$$\tau^{\infty} \wedge \left(0_{F_-}\right)^{\infty} \wedge p(\varphi) = \inf \{\tau(\psi) + p(\theta) \ | \ \psi \in E \ , \ \theta \in F \text{ tel que } \varphi \leqslant \psi + \theta\}$$

et $\tau^{\infty} \wedge \left(0_{F_-}\right)^{\infty} \wedge p(0) = 0$ entraîne la condition. Remarquons que $\tau$ est positive si, et seulement si, on a $\tau^*(0) = 0$ , ce qui est évidemment le cas lorsque la condition est satisfaite! Réciproquement pour tout $\varphi \in F$ , $\psi \in E$ et $\theta \in F$ tels que $\varphi \leqslant \psi + \theta$ , on a $\psi \geqslant \varphi - \theta$ , donc

$$\tau(\psi) \geqslant \tau^*(\varphi - \theta) \geqslant -p(-\varphi + \theta) \geqslant -p(\theta) - p(-\varphi) ,$$

et par suite

$$\tau^{\infty} \wedge \left(0_{F_-}\right)^{\infty} \wedge p(\varphi) \geqslant -p(-\varphi) > -\infty .$$

□

**REMARQUE** Le principe d'une démonstration de (i), à l'aide de l'induction transfinie, se trouve déjà dans un travail de Marcel Riesz [RiM 1923] et même déjà exposé devant la Société Mathématique de Stockholm en 1918. Il cite également les travaux précurseurs de Frédéric Riesz [RiF 1914] et E. Helly [Hel 1912].

## 1.2 Ensembles convexes compacts de dimension finie

Rappelons la

**DÉFINITION 1** $(E, T)$ est un espace affine, si $E$ est un ensemble non-vide et $T$ un espace vectoriel (sur $\mathbb{K}$ ) tel que le groupe additif de $T$ opère librement et transitivement sur $E$ , i.e. on a une application

$$T \times E \longrightarrow E : (t, P) \longmapsto t + P$$

satisfaisant aux axiomes :

**EA** 1 Pour tout $s, t \in T$ et $P \in E$ , on a

$$s + (t + P) = (s + t) + P \; .$$

**EA** 2 Pour tout $P \in E$ , on a

$$0 + P = P \; .$$

**EA** 3 Pour tout $P, Q \in E$ , il existe un unique $t \in T$ tel que l'on ait

$$t + P = Q \; .$$

Dans ce cas on écrit

$$t =: Q - P =: PQ \qquad , \text{i.e.} \qquad PQ + P = Q \; .$$

**LEMME** *Pour tout $P, Q, R \in E$ , on a*

$$PQ + QR = PR \; .$$

En effet

$$PR + P = R = QR + Q = QR + PQ + P \; .$$

□

En choisissant un point $O \in E$ , on peut munir $E$ d'une structure d'espace vectoriel (dépendante de $O$ !) en posant, pour tout $P, Q \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ :

$$P + Q := R \qquad \text{si} \qquad OR = OP + OQ$$

et

$$\alpha \cdot P = R \qquad \text{si} \qquad OR = \alpha \cdot OP \; .$$

Soit $E_O$ cet espace vectoriel.

On se représente $E$ comme l'ensemble des points de la géométrie élémentaire, $T$ comme l'espace vectoriel des translations dans $E$ et $P\,(t + P)$ comme le vecteur de la géométrie élémentaire joignant $P$ à $t + P$ ; $t$ est donc la classe de tous ces vecteurs qui sont dits *équipollents* .

Pour toutes suites $(P_j)_{j \in n} \subset E$ et $(\alpha_j)_{j \in n} \subset \mathbb{K}$ , on peut définir

$$P := \sum_{j \in n} \alpha_j \cdot P_j \; .$$

On a donc

$$OP = \sum_{j \in n} \alpha_j \cdot OP_j$$

et en remplaçant $O$ par $O' \in E$ on obtient un autre point $P'$ tel que

$$O'P' = \sum_{j \in n} \alpha_j \cdot O'P_j \ .$$

Il vient alors

$$PP' = PO + OO' + O'P' = OO' + \sum_{j \in n} \alpha_j \cdot O'P_j - \sum_{j \in n} \alpha_j \cdot OP_j =$$

$$= \sum_{j \in n} \alpha_j \cdot (O'P_j - OP_j) - O'O = \left( \sum_{j \in n} \alpha_j - 1 \right) \cdot O'O \ .$$

Ceci montre que la structure d'espace vectoriel de $E$ dépend bien de $O$ . Mais

$$\sum_{j \in n} \alpha_j = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad P' = P \ .$$

On dit alors que $P$ est le *barycentre* (ou le *centre de gravité* ) des points $(P_j)_{j \in n}$ affectés des masses $(\alpha_j)_{j \in n}$ . Pour plus de détails voir le livre de R. Godement [God 1963], §25, p. 327.

**DÉFINITION 2** Une fonction $a : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite *affine* si, pour toutes suites $(P_j)_{j \in n} \subset E$ et $(\alpha_j)_{j \in n} \subset \mathbb{K}$ , on a

$$a \left( \sum_{j \in n} \alpha_j \cdot P_j \right) = \sum_{j \in n} \alpha_j \cdot a (P_j) \ .$$

Dans le cas réel on peut munir $E$ de la topologie induite par la topologie localement convexe la plus fine sur $T$ .

**PROPOSITION** *Soit $O \in E$ .*

*(i) Toute fonction affine sur $E$ est de la forme $c + \ell$ , où $c \in \mathbb{R}$ et $\ell \in E_O^*$ est une forme linéaire sur $E_O$ .*

*(ii) Pour que $P$ soit le barycentre des points $(P_j)_{j \in n}$ affectés des masses $(\alpha_j)_{j \in n}$ , il faut et il suffit que, pour toute fonction affine $a : E \longrightarrow \mathbb{R}$ , on ait*

$$a (P) = \int a \, d \left( \sum_{j \in n} \alpha_j \cdot \varepsilon_{P_j} \right) \ .$$

*Il suffit que cette égalité ait lieu pour toute forme linéaire $\ell \in E_O^*$ .*

**Démonstration de (i)** En effet si $a$ est une fonction affine sur $E$ , alors $\ell := a - a(O)$ est linéaire, car $\alpha \cdot P = \alpha \cdot P + [1 - \alpha] \cdot O$ , donc

$$\ell (\alpha \cdot P) = a (\alpha \cdot P + [1 - \alpha] \cdot O) - a (O) = \alpha \cdot a (P) + [1 - \alpha] \cdot a (O) - a (O) =$$

$$= \alpha \cdot a (P) - \alpha \cdot a (O) = \alpha \cdot \ell (P) \ .$$

**Démonstration de (ii)** La condition est nécessaire puisque

$$\int a\, d\left(\sum_{j\in n} \alpha_j \cdot \varepsilon_{P_j}\right) = \sum_{j\in n} \alpha_j \cdot a\left(P_j\right) = a\left(\sum_{j\in n} \alpha_j \cdot P_j\right) = \alpha\left(P\right) \ .$$

La réciproque découle du théorème de Hahn-Banach ou plus simplement, puisque la topologie ne joue aucun rôle, en choisissant une base algébrique $(e_j)_{j\in J}$ de $E_O$ . En effet si $P \neq \sum_{j\in n} \alpha_j \cdot P_j$ , il existe $k \in J$ tel que les $k$-ième composantes de $P$ et $\sum_{j\in n} \alpha_j \cdot P_j$ soient différentes. Soit $\ell$ la forme linéaire sur $E_O$ valant 0 sur $(e_j)_{j\in J\smallsetminus\{k\}}$ et 1 sur $e_k$ . On a évidemment

$$\ell\left(P\right) \neq \ell\left(\sum_{j\in n} \alpha_j \cdot P_j\right) =$$

$$= \sum_{j\in n} \alpha_j \cdot \ell\left(\sum_{j\in n} \alpha_j \cdot P_j\right) = \int \ell\, d\left(\sum_{j\in n} \alpha_j \cdot \varepsilon_{P_j}\right) \ ,$$

ce qui finit de prouver notre assertion. □

Soit $X$ une partie convexe compacte non-vide de $E$ . Il est équivalent de dire que $X$ est fermée et bornée ; en outre elle est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E_O$ . Si $O \in X$ , soit $n := \dim\left(\operatorname{lin}_{E_O} X\right)$ la dimension de $X$ .

On dit que $x \in X$ est un *point extrémal* si, pour tout $y, z \in X$ avec $x = \frac{1}{2} \cdot (y + z)$ , on a $y = z = x$ . Nous désignerons par $Ch\left(X\right)$ l'ensemble des points extrémaux de $X$ et nous dirons que c'est la *frontière de Choquet* de $X$ à cause des généralisations ultérieures.

**THÉORÈME (Carathéodory)** *Tout point $x \in X$ est le barycentre de au plus $n+1$ points extrémaux $(x_j)_{j\in m}$ affinement indépendants de $X$ . En particulier $x$ est de la forme*

$$x = \sum_{j\in m} \alpha_j \cdot x_j \quad , \text{ où } (\alpha_j)_{j\in m} \subset \mathbb{R}_+^* \ , \ \sum_{j\in m} \alpha_j = 1 \ , \ (x_j)_{j\in m} \subset Ch\left(X\right) \text{ et } m \leqslant n+1 \ ,$$

*donc $X$ est l'enveloppe convexe de $Ch\left(X\right)$ .*

**DÉFINITION 3** Nous dirons que l'ensemble convexe compact formé des $x = (x_j)_{j\in n} \in \mathbb{R}^n$ tels que $(x_j)_{j\in n} \subset \mathbb{R}_+$ et $\sum_{j\in n} x_j = 1$ est le *simplexe standard* (de dimension $n-1$ ). Plus généralement, un ensemble convexe compact est dit un *simplexe* s'il est l'image affine injective d'un simplexe standard.

Les points extrémaux du simplexs standard de dimension $n-1$ sont les éléments de la base canonique $(e_j)_{j\in n}$ de $\mathbb{R}^n$ et la décomposition de tout point $x = \sum_{j\in n} x_j \cdot e_j$ du simplexe standard est unique !

Utilisant cette notion, le théorème de Carathéodory peut aussi se formuler sans faire intervenir l'indépendance affine :

**COROLLAIRE** *Pour tout $x \in X$ , il existe un simplexe $\Delta$ tel que $x \in \Delta \subset X$ et $Ch\left(\Delta\right) \subset Ch\left(X\right)$ .*

Pour plus de détails on peut consulter l'article général de Ludwig Danzer, Branko Grünbaum et Victor Klee [DanGrüKle 1962].

## 1.3 Ensembles convexes compacts dans un espace localement convexe

Soient $F$ un espace localement convexe réel séparé, $X$ une partie convexe compacte non-vide de $F$ et $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ une intégrale de Radon positive sur $X$ . Nous désignerons par $\iota : X \hookrightarrow F$ l'injection canonique de $X$ dans $F$ .

Il est parfois utile de bien distinguer si l'on travaille dans $X$ , à l'aide d'informations provenant de $F$ mais formulées dans $X$ , ou si l'on veut étudier les liaisons de $X$ avec $F$ . Ceci s'écrit à l'aide de $\iota$ , mais conduit évidemment à un alourdissement des notations. Nous l'éviterons en général, en particulier lorsque le contexte sera clair. Par exemple nous ne ferrons pas de distinction entre l'intégrale de Radon $\mu$ sur $X$ et son image $\iota(\mu)$ dans $F$ .

Considérons tout d'abord le cas de la dimension finie $F = \mathbb{R}^n$ . Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$ , rappelons que $x$ est l'*intégrale* de $\iota$ par rapport à $\mu$ et on écrit

$$x = \int \iota \, d\mu = \int \iota(y) \, d\mu(y) = \int y \, d\mu(y)$$

si, pour tout $j \in n$ ,

$$x_j = \int y_j \, d\mu(y) = \int \mathrm{pr}_j \, d\mu \ .$$

Mais ceci peut s'écrire

$$\left\langle x \left| \mathrm{pr}_j \right.\right\rangle = \int \left\langle y \left| \mathrm{pr}_j \right.\right\rangle \, d\mu(y)$$

ou encore

$$\langle x | \ell \rangle = \int \langle y | \ell \rangle \, d\mu(y)$$

pour toute forme linéaire $\ell$ sur $\mathbb{R}^n$ .

Dans le cas général on dit que $x \in F$ est l'*intégrale faible* de $\iota$ par rapport à $\mu$ et on écrit

$$x = \int \iota \, d\mu = \int \iota(y) \, d\mu(y) = \int y \, d\mu(y)$$

si pour tout forme linéaire continue $\ell \in F'$ , on a

$$\langle x | \ell \rangle = \int \langle y | \ell \rangle \, d\mu(y) \ ,$$

i.e.

$$\left\langle \int \iota \, d\mu \right| \left. \ell \right\rangle = \int \langle \iota | \ell \rangle \, d\mu \ .$$

Le théorème de Hahn-Banach montre que $x$ est univoquement déterminé par cette égalité.

En effet pour tout $x, y \in F$ tels que $x \neq y$ , on a $x - y \neq 0$ et il existe une semi-norme continue $p$ sur $F$ telle $p(x - y) \neq 0$ . Mais alors il existe une forme linéaire $\ell$ sur $F$ telle que $\ell \leqslant p$ et $\ell(x - y) \neq 0$ , donc $\ell \in F'$ tet $\ell(x) \neq \ell(y)$ . $\square$

Quant à l'existence on a le

**LEMME 1** *Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ , $\iota$ est $\mu$-intégrable (au sens de Pettis) dans $F_\sigma$ et*

$$\int \iota \, d\mu \in \mu(X) \cdot X \ .$$

Puisque

$$|\ell\rangle : F \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \langle \varphi | \, \ell \rangle$$

est continue, donc bornée sur $X$ , on a $|\ell\rangle \in \mathbf{L}^1(\mu)$ , donc

$$\int \iota \, d\mu : F' \longrightarrow \mathbb{R} : \ell \longmapsto \int \langle \varphi | \, \ell \rangle \, d\mu(\varphi)$$

est une forme linéaire sur $F'$ , i.e. $\int \iota \, d\mu \in (F')^*$ . La compacité de $X$ montre aussi que la forme sous-linéaire $\mathrm{sl}_X : F' \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{sl}_X(\ell) := \sup\nolimits_{x \in X} \langle x | \, \ell \rangle$$

est continue pour la topologie de Mackey sur $F'$ et, grâce à la dualité de Fenchel on obtient

$$X = \overline{\mathrm{co}}(X) = \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_X} := \{\varphi \in F \mid \langle \varphi | \leqslant \mathrm{sl}_X\} \ .$$

On a alors

$$\left\langle \int \iota \, d\mu \middle| \, \ell \right\rangle = \int \langle \varphi | \, \ell \rangle \, d\mu(\varphi) \leqslant \int \mathrm{sl}_X(\ell) \, d\mu = \mu(X) \cdot \mathrm{sl}_X(\ell) \ ,$$

pour tout $\ell \in F'$ , et par suite $\int \iota \, d\mu \in \mu(X) \cdot X$ . En outre

$$\left| \left\langle \int \iota \, d\mu \middle| \, \ell \right\rangle \right| \leqslant \mu(X) \cdot |\mathrm{sl}_X(\ell)| \leqslant \mu(X) \cdot \mathrm{sn}_X(\ell) \ ,$$

où $\mathrm{sn}_X(\ell) := \sup_{x \in X} |\langle x | \, \ell \rangle|$ définit une semi-norme de Mackey sur $F'$ . On dit que $\iota$ est $\mu$-intégrable dans $F_\sigma$ au sens de Pettis.

Pour plus de détails on peut consulter mon cours d'Analyse fonctionnelle [Por AF], en particulier le théorème 3.7 , qui montre que $F_\sigma = (F')'$ , le corollaire 3.9.iii pour la dualité de Fenchel et la remarque 2 et le théorème 3.12 pour la $\mu$-intégrabilité dans $F_\sigma$ . ———— □

**DÉFINITION 1** Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$ , i.e. $\mu(X) = 1$ , on a $\int \iota \, d\mu \in X$ et on dit que $\int \iota \, d\mu$ est le *barycentre* ou la *résultante* de $\mu$ , ou que $\mu$ *représente* $\int \iota \, d\mu$ .

L'espace vectoriel $\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{C}(X)$ formé des restrictions à $X$ des fonctions affines continues sur $F$ , qui sont de la forme

$$c + \ell_{|X} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \ell \in F' \ ,$$

contient les constantes et sépare les points de $X$ par le théorème de Hahn-Banach. Ainsi

**LEMME 2** *Si $\mu$ est une intégrale de Radon positive sur $X$ , alors $\mu$ représente $x \in X$ si, et seulement si, on a*

$$\mu(a) = a(x) \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}(X) \ .$$

**REMARQUE 1** Ceci montre que

$$\mu : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \mu(f)$$

s'obtient comme un prolongement linéaire positif de la forme linéaire positive

$$\tau : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : a \longmapsto a(x) \ .$$

**LEMME 3** *Si $A$ est une partie fermée de $X$ , alors $\overline{\mathrm{co}}(A)$ est une partie convexe compacte de $X$ et l'application*

$$\mathcal{M}_+^1(A) \longrightarrow \overline{\mathrm{co}}(A) : \mu \longmapsto \int \iota \, d\mu \ ,$$

*où $\iota : A \hookrightarrow F$ désigne l'injection canonique, est surjective.*

En effet la topologie induite par $F_\sigma$ sur $\overline{\mathrm{co}}(A)$ est la même que celle induite par $F$ , puisque $F \longrightarrow F_\sigma$ est continue et

$$\mathcal{M}(A) \longrightarrow F_\sigma : \mu \longmapsto \int \iota \, d\mu$$

est linéaire continue car, pour tout $\ell \in F'$ , on a $\left\langle \int \iota \, d\mu \middle| \ell \right\rangle = \int \langle \iota | \ell \rangle \, d\mu$ et $\langle \iota | \ell \rangle \in \mathcal{C}(A)$ . Mais comme $\mathcal{M}_+^1(A)$ est une partie convexe compacte de $\mathcal{M}(A) = \mathcal{C}(A)'_\sigma$ , il en est de même de son image, et celle-ci contient évidemment $\mathrm{co}(A)$ . □

**DÉFINITION 2** Soit $X$ une partie convexe de $F$ . On dit que $x \in X$ est un *point extrémal* si, pour tout $y, z \in X$ avec $x = \frac{1}{2} \cdot (y + z)$ , on a $y = z = x$ .

**EXERCICE 1** Montrer que $x \in X$ est extrémal si, et seulement si, pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et $y, z \in X$ tels que $x = \alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z$ , on a $y = z = x$ .

**PROPOSITION (H. Bauer** [Bau 1961]**, 4.2, Hilfssatz 7, p. 118)** *Pour que $x \in X$ soit un point extrémal, il faut et il suffit que $\varepsilon_x$ soit l'unique intégrale de Radon qui représente $x$ .*

La condition est suffisante, si $x = \frac{1}{2} \cdot (y + z)$ , alors $\frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_y + \varepsilon_z)$ représente $x$ puisque pour tout $a \in \mathcal{A}(X)$ , on a

$$\frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_y + \varepsilon_z)(a) = \frac{1}{2} \cdot (a(y) + a(z)) = a\left(\frac{1}{2} \cdot (y + z)\right) = a(x) \ .$$

Ainsi $\frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_y + \varepsilon_z) = \varepsilon_x$ , donc $y = z = x$ . Réciproquement soit $\mu$ une intégrale de Radon qui représente $x$ . Si $\mathrm{supp}\,\mu \neq \{x\}$ , soit $y \in \mathrm{supp}\,\mu \smallsetminus \{x\}$ . Il existe donc $a \in \mathcal{A}(X)$ avec $a(x) > 0$ et $a(y) < 0$ et l'ensemble $Y := \left\{a \leqslant \frac{a(y)}{2}\right\}$ est convexe compact. Si l'on avait $\mu(Y) = 1$ , on aurait $\mathrm{supp}\,\mu \subset Y$ , donc $x \in Y$ par le lemme, ce qui est absurde. D'autre part $y \in \mathrm{supp}\,\mu \cap \left\{a < \frac{a(y)}{2}\right\}$ , donc $\mu(Y) \geqslant \mu\left(\left\{a < \frac{a(y)}{2}\right\}\right) > 0$ . Ainsi $0 < \mu(Y) < 1$ . Posons $\mu_1 := \frac{1}{\mu(Y)} \cdot 1_Y \cdot \mu$ et $\mu_2 := \frac{1}{1-\mu(Y)} \cdot 1_{X \smallsetminus Y} \cdot \mu$ . Si $x_j$ désigne le barycentre de $\mu_j$ , par le lemme on a $x_1 \in Y$ , donc $x_1 \neq x$ puisque $a(x) > 0$ , et $x_2 \in \left\{a \geqslant \frac{a(y)}{2}\right\} \subset X$ . Il vient alors

$$x = \int \iota \, d\mu = \int \iota \, d\left[\mu(Y) \cdot \mu_1 + (1 - \mu(Y)) \cdot \mu_2\right] =$$

$$= \mu(Y) \cdot \int \iota \, d\mu_1 + (1 - \mu(Y)) \cdot \int \iota \, d\mu_2 = \mu(Y) \cdot x_1 + (1 - \mu(Y)) \cdot x_2 \ ,$$

ce qui montre que $x$ n'est pas un point extrémal. Ainsi $\operatorname{supp} \mu = \{x\}$ et par suite $\mu = \varepsilon_x$ . □

**DÉFINITION 3** Nous désignerons par $Ch(X)$ l'ensemble des points extrémaux de $X$ . On dit aussi que c'est la *frontière de Choquet* de $X$ . On dit que $\check{S}(X) := \overline{Ch(X)}$ est la *frontière de Šhilov* de $X$ .

Le terme de frontière sera précisé dans la définition ci-dessous.

**COROLLAIRE (Milman)** *Si $A$ est une partie fermée de $X$ , alors*

$$Ch(X) \cap \overline{\mathrm{co}}(A) = Ch(X) \cap Ch(\overline{\mathrm{co}}(A)) = Ch(X) \cap A \ .$$

*En particulier si $\overline{\mathrm{co}}(A) = X$ , alors $Ch(X) \subset A$ .*

Si $x \in \overline{\mathrm{co}}(A) \subset X$ est un point extrémal de $X$ , c'est évidemment aussi un point extrémal de $\overline{\mathrm{co}}(A)$ . La première égalité est donc démontrée. Il nous reste à prouver que $Ch(X) \cap Ch(\overline{\mathrm{co}}(A)) \subset Ch(X) \cap A$ , puisque l'autre inclusion $Ch(X) \cap \overline{\mathrm{co}}(A) \supset Ch(X) \cap A$ est triviale. Comme tout $x \in \overline{\mathrm{co}}(A)$ est le barycentre d'une intégrale de Radon $\mu \in \mathcal{M}_+^1(A)$ par le lemme 3, si $x \in Ch(\overline{\mathrm{co}}(A))$ , on a $\mu = \varepsilon_x$ par la proposition, donc $x \in A$ . □

La première généralisation du théorème de Carathéodory est le

**THÉORÈME (Krein-Milman)** *$X$ est l'enveloppe fermée convexe de $Ch(X)$ .*

Nous verrons grâce au théorème de Choquet-Bishop-de Leeuw (corollaire 1.5.1) que, pour tout $x \in X$ , il existe une intégrale de Radon $\mu$ portée par $\check{S}(X)$ qui représente $x$ . Grâce au lemme 1 ci-dessus on obtient immédiatement

$$x \in \overline{\mathrm{co}}\left(\check{S}(X)\right) = \overline{\mathrm{co}}(Ch(X)) \ .$$

□

**REMARQUE 2** On peut démontrer le théorème de Krein-Milman directement en utilisant le théorème de séparation des ensembles convexes compacts. Voir par exemple Bourbaki [Bou 1981], §7, no. 1, p. 57 et ss. Les arguments utilisés sont ceux qui conduisent au principe du minimum de Bauer (cf. §1.5). On a donc $X = \overline{\mathrm{co}}\left(\check{S}(X)\right)$ et le lemme 3 prouve l'existence d'une intégrale de Radon $\mu$ portée par $\check{S}(X)$ qui représente $x$ . En d'autres termes le théorème de Krein-Milman est équivalent à l'existence d'une représentation intégrale sur $\check{S}(X)$ .

**REMARQUE 3** Malheureusement V.L. Klee [Kle 1959] a montré que presque tous les ensembles convexes compacts $X$ d'un espace de Banach de dimension infinie sont égaux à $\check{S}(X)$ . Mais heureusement G. Choquet [Cho 1956a], [Cho 1956b], [Cho 1956c], [Cho 1956/57] a pû généraliser ce théorème sous la forme suivante :

**THÉORÈME (de Choquet)** *Si $X$ est métrisable, pour tout $x \in X$ , il existe une intégrale de Radon $\mu$ portée par $Ch(X)$ qui représente $x$ .*

Sa démonstration, qui utilisait la notion de diffusion d'une mesure, a été considérablement simplifiée par E. Bishop et K. de Leeuw [BisLee 1959]. Ils ont également étendu le théorème de Choquet de manière adéquate au cas non-métrisable. G. Choquet, G. Mokobodzki et P.A. Meyer [Cho 1960], [Mok 1962a], [ChoMey 1963] ont à nouveau simplifiés certains points et bien compris le rôle joué par le théorème de Hahn-Banach.

**DÉFINITION 4** On dit qu'une partie $A \subset X$ est une *frontière* si

$$\text{pour tout } a \in \mathcal{A}(X) \ , \quad a \geqslant 0 \text{ sur } A \quad \Longrightarrow \quad a \geqslant 0 \ .$$

**PROPOSITION** *$Ch(X)$ est une frontière et $\check{S}(X)$ est la plus petite frontière fermée.*

En effet si $a \in \mathcal{A}(X)$ est $\geqslant 0$ sur $Ch(X)$ , alors $a \geqslant 0$ sur $\overline{\mathrm{co}\,(Ch(X))} = X$ par le théorème de Krein-Milman. Il est donc clair que $\check{S}(X)$ est une frontière fermée. C'est la plus petite. Tout d'abord si $A$ est une frontière, alors $\overline{\mathrm{co}\,(A)} = X$ , car dans le cas contraire si $x \in X \smallsetminus \overline{\mathrm{co}\,(A)}$ le théorème de séparation montre qu'il existe $a \in \mathcal{A}(X)$ telle que $a \geqslant 0$ sur $\overline{\mathrm{co}\,(A)}$ et $a(x) < 0$ . Le théorème de Milman montre alors que $Ch(X) \subset A$ , donc $\check{S}(X) \subset A$ si $A$ est fermée. $\square$

**EXERCICE 2** Soit $J$ un ensemble infini. Montrer que la boule unité de $c^0(J)$ , muni la norme uniforme, ne possède aucun point extrémal.

**EXERCICE 3 (Exemple de Poulsen** [Pou 1959], [LinOlsSte 1978]**)** Dans l'espace de Hilbert réel $\ell^2(\mathbb{N})$ on considère l'ensemble $X$ des suites $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{2k} \cdot \xi_k^2 \leqslant 1$ . Montrer :

(a) L'ensemble $X$ est compact.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ , on considère $\ell^2(n)$ comme un sous-espace vectoriel fermé de $\ell^2(\mathbb{N})$ . On a

$$E_n := Ch\left(X \cap \ell^2(n)\right) \subset Ch(X) \ .$$

(c) La réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est dense dans $X$ .

**EXERCICE 4** L'exemple suivant montre que l'enveloppe convexe, resp. fermée convexe, d'une partie compacte n'est pas nécessairement fermée, resp. compacte. Soient $F := \mathbb{R}^{\mathcal{C}([0,1])}$ ,

$$\lambda : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \int_0^1 f$$

l'intégrale de Riemann et, pour tout $t \in [0,1]$ ,

$$\varepsilon_t : x \longmapsto x(t) : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Montrer :

(a) On a $\varepsilon_t \in F$ et $\varepsilon_{[0,1]} := \{\varepsilon_t \mid t \in [0,1]\}$ est une partie compacte de $F$ .

(b) On a $\lambda \in \overline{\mathrm{co}}\left(\varepsilon_{[0,1]}\right)$ , mais $\lambda \notin \mathrm{co}\left(\varepsilon_{[0,1]}\right)$ , i.e. $\mathrm{co}\left(\varepsilon_{[0,1]}\right)$ n'est pas fermée dans $F$ .

(c) Si $G := \mathrm{lin}\,\varepsilon_{[0,1]}$ est le sous-espace localement convexe de $F$ engendré par $\varepsilon_{[0,1]}$ , alors $\mathrm{co}\left(\varepsilon_{[0,1]}\right)$ est une partie fermée de $G$ , qui n'est pas compacte.

**EXERCICE 5** Montrer que si $K$ et $L$ sont des ensembles convexes compacts de $F$ , alors l'enveloppe convexe de $K \cup L$ est compacte.

## 1.4 Le théorème de Choquet-Bishop-de Leeuw

**DÉFINITION** Soit $\mathcal{R}(X)$ l'ensemble des fonctions de la forme $\min_{j\in n} a_j$ avec $(a_j)_{j\in n} \subset \mathcal{A}(X)$ . Si $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$ sont des intégrales de Radon (positives) sur $X$ , nous écrirons $\nu \leqslant_{\mathcal{R}} \mu$ si $\nu(r) \leqslant \mu(r)$ , pour tout $r \in \mathcal{R}(X)$; on dit que $\nu$ est une $\mathcal{R}(X)$-*balayée* de $\mu$ . Si $\mu$ est minimale pour l'ordre $\leqslant_{\mathcal{R}(X)}$ , nous dirons $\mathcal{R}(X)$-*minimale* .

Si $f \in \mathcal{C}(X)$ , soit

$$\widehat{f} := \inf\{a \in \mathcal{A}(X) \mid f \leqslant a\} = \inf\{r \in \mathcal{R}(X) \mid f \leqslant r\} \ .$$

Un ensemble de la forme

$$B_f := \left\{\widehat{f} = f\right\} \quad , \quad \text{où } f \in -\mathcal{R}(X) \ ,$$

est dit *bordant* (on peut aussi admettre que $f$ est une fonction convexe continue).

La relation $\mu \leqslant_{\mathcal{R}(X)} \nu$ signifie que $\mu$ a plus de masse vers le "bord" de $X$ que $\nu$ .

**PROPOSITION** *Soit $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ .*

*(i) Les fonctions de $\mathcal{R}(X)$ sont concaves continues sur $X$ et $\leqslant_{\mathcal{R}(X)}$ est un ordre sur $\mathcal{M}_+(X)$ .*

*(ii) Pour que $\mu$ représente $x \in X$ (en particulier $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$ !), il faut et il suffit que $\mu \leqslant_{\mathcal{R}(X)} \varepsilon_x$ ; pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$ et $x \in X$ , on a*

$$\widehat{f}(x) = \sup\nolimits_{\mu\in\mathcal{M}_+(X),\mu\leqslant_{\mathcal{R}(X)}\varepsilon_x} \mu(f) \ .$$

*(iii) Un ensemble bordant est un $G_\delta$ , dont le complémentaire dans $X$ est convexe, et*

$$Ch(X) = \bigcap_{f\in\mathcal{C}(X)} B_f = \bigcap_{f\in-\mathcal{R}(X)} B_f \ .$$

*(iv) Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ ,*

$$\widehat{\mu} : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \int \widehat{f}\, d\mu$$

*est une forme sous-linéaire croissante continue sur $\mathcal{C}(X)$ .*

*Si $\nu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}(X)$ , alors $\nu \leqslant \widehat{\mu}$ est équivalent à $\nu \in \mathcal{M}_+(X)$ et $\nu \leqslant_{\mathcal{R}(X)} \mu$ .*

*(v) Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *(a) $\mu$ est $\mathcal{R}(X)$-minimale.*
- *(b) $\mu = \widehat{\mu}$ sur $\mathcal{C}(X)$ .*
- *(c) $\mu$ est portée par chaque ensemble bordant, i.e. $\mu = \widehat{\mu}$ sur $-\mathcal{R}(X)$ .*

*(vi) Si $\mu$ est portée par tout ouvert contenant $Ch(X)$ , alors $\mu$ est $\mathcal{R}(X)$-minimale.*

**Démonstration de (i)** La première partie est immédiate. L'antisymétrie découle du fait que $\mathcal{R}(X) - \mathcal{R}(X)$ est un sous-espace vectoriel réticulé de $\mathcal{C}(X)$ contenant les constantes et séparant les points de $X$ , donc dense dans $\mathcal{C}(X)$ par le théorème de Stone-Kakutani.

**Démonstration de (ii)** En effet pour tout $a \in \mathcal{A}(X)$ , $\mu(a) = a(x)$ est équivalent à $\mu(\pm a) \leqslant \pm a(x) = \varepsilon_x(\pm a)$ ; ainsi $\mu$ représente $x$ si, et seulement si, pour tout $a \in \mathcal{A}(X)$ , on a $\mu(a) \leqslant \varepsilon_x(a)$ ; mais si $(a_j)_{j\in n} \subset \mathcal{A}(X)$ et $r = \min_{j\in n} a_j \in \mathcal{R}(X)$ , cette relation entraîne

$$\mu(r) \leqslant \mu(a_j) \leqslant \varepsilon_x(a_j) \quad \text{pour tout } j \in n \ ,$$

donc

$$\mu(r) \leqslant \min_{j\in n} \varepsilon_x(a_j) = \varepsilon_x(\min_{j\in n} a_j) = \varepsilon_x(r) \ ,$$

i.e. $\mu \leqslant_{\mathcal{R}(X)} \varepsilon_x$ . La réciproque est évidente. En outre

$$\mu(\pm 1) \leqslant \varepsilon_x(\pm 1) = \pm 1 \ ,$$

donc $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$ . Puisque $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ et $\mu \leqslant_{\mathcal{R}(X)} \varepsilon_x$ signifie que $\mu$ est un prolongement linéaire positif de

$$\tau : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : a \longmapsto a(x) \ ,$$

la forme sous-linéaire associée à ce problème est

$$f \longmapsto \tau^*(f) = \inf_{a\in\mathcal{A}(X), f\leqslant a} a(x) = \widehat{f}(x) \ .$$

Le théorème de Hahn-Banach montre alors, $f \in \mathcal{C}(X)$ et $x \in X$ étant donnés, qu'il existe un tel $\mu$ satisfaisant à $\widehat{f}(x) = \mu(f)$ .

**Démonstration de (iii)** On a

$$B_f = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ \widehat{f} - f < \frac{1}{n} \right\}$$

et $\widehat{f} - f$ est une fonction semi-continue supérieurement (s.c.s.).

Si $x \in Ch(X)$ , alors $\varepsilon_x$ est l'unique intégrale de Radon qui représente $x$ par la proposition, donc $f(x) = \widehat{f}(x)$ par (ii) et par suite $x \in B_f$ quel que soit $f \in \mathcal{C}(X)$ . Réciproquement si $x \notin Ch(X)$ , il existe $y, z \in X$ et $\alpha \in ]0,1[$ tels que $x = \alpha \cdot y + (1-\alpha) \cdot z$ , puis $b \in \mathcal{A}(X)$ tel que $b(y) < 0$ et $b(z) > 0$ . Comme $|b| \in -\mathcal{R}(X)$ et

$$|b(x)| = |\alpha \cdot b(y) + (1-\alpha) \cdot b(z)| = \Big|\alpha \cdot |b(y)| - (1-\alpha) \cdot |b|(z)\Big| < \alpha \cdot |b(y)| + (1-\alpha) \cdot |b|(z) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \cdot a(y) + (1-\alpha) \cdot a(z) = a(\alpha \cdot y + (1-\alpha) \cdot z) = a(x)$$

pour tout $a \in \mathcal{A}(X)$ tel que $|b| \leqslant a$ , il vient

$$|b(x)| < \alpha \cdot |b(y)| + (1-\alpha) \cdot |b(z)| \leqslant \widehat{|b|}(x) \ ,$$

ce qui montre que $x \notin B_{|b|}$ .

**Démonstration de (iv)** On vérifie rapidement que $f \longmapsto \widehat{f} : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^X$ est sous-linéaire croissante. On en déduit évidemment la première partie, puis la continuité de $\widehat{\mu}$ , car pour tout $f, g \in \mathcal{C}(X)$ , on a

$$|\widehat{\mu}(f) - \widehat{\mu}(g)| \leqslant \max\Big(\widehat{\mu}(f-g), \widehat{\mu}(g-f)\Big) \leqslant \|f-g\|_\infty \ .$$

En effet $\widehat{\mu}(f) = \int \widehat{f}\, d\mu \leqslant \int \|f\|_\infty \, d\mu = \mu(X) \cdot \|f\|_\infty$ , puisque la constante $\|f\|_\infty$ appartient à $\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{R}(X)$ .

Si $\nu \in \mathcal{M}_+(X)$ et $\nu \leqslant_{\mathcal{R}(X)} \mu$ , pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$ , il vient

$$\nu(f) \leqslant \inf_{r\in\mathcal{R}(X), f\leqslant r} \mu(r) = \int \inf_{r\in\mathcal{R}(X), f\leqslant r} r\, d\mu = \int \widehat{f}\, d\mu = \widehat{\mu}(f)$$

par la propriété de Bourbaki. La réciproque est triviale puisque, pour tout $f \in \mathcal{C}_-(X)$ , on a $\widehat{f} \leqslant 0$ , donc

$$\nu(f) \leqslant \widehat{\mu}(f) = \int \widehat{f}\, d\mu \leqslant 0$$

et, pour tout $r \in \mathcal{R}(X)$ , on a $\widehat{r} = r$ , donc $\nu(r) \leqslant \widehat{\mu}(r) = \mu(r)$ .

**Démonstration de (v)** Les assertions (a) et (b) sont équivalentes par (iv).

Si $f \in \mathcal{C}(X)$ , on a évidemment $f \leqslant \widehat{f}$ , donc $\mu(f) \leqslant \int \widehat{f}\, d\mu = \widehat{\mu}(f)$ , ce qui montre que $\mu(B_f) = 0$ est équivalent à $\mu(f) = \widehat{\mu}(f)$ . Ainsi (b) entraîne (c). Réciproquement on a $\mu = \widehat{\mu}$ sur $\mathcal{R}(X) \cup -\mathcal{R}(X)$ , donc

$$\mu(r-s) \leqslant \widehat{\mu}(r-s) \leqslant \widehat{\mu}(r) + \widehat{\mu}(-s) = \mu(r) + \mu(-s) = \mu(r-s)$$

et par suite $\mu = \widehat{\mu}$ sur $\mathcal{R}(X) - \mathcal{R}(X)$ . On en déduit (b) par continuité et densité.

**Démonstration de (vi)** Si $\mu$ est portée par tout ouvert contenant $Ch(X)$ , alors $\mu$ est portée par tout $G_\delta$ contenant $Ch(X)$ , donc par tout ensemble bordant. □

**THÉORÈME (Choquet-Bishop-de Leeuw)** *Pour tout $x \in X$ , il existe une intégrale de Radon $\mu$ représentant $x$ qui soit $\mathcal{R}(X)$-minimale, i.e. portée par tout ensemble bordant.*

A l'aide de ce qui précède, il suffit d'appliquer le principe de maximalité de Hausdorff. En effet si $M \subset \mathcal{M}_+(X)$ est une chaîne maximale pour $\leqslant_{\mathcal{R}(X)}$ contenant $\varepsilon_x$ ,

$$\tau : r \longmapsto \inf M(r) : \mathcal{R}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est linéaire croissante. Remarquer que, pour tout $r \in \mathcal{R}(X)$ , on a $\tau(r) \geqslant \inf_{\nu \in M, \nu \leqslant_{\mathcal{R}(X)} \varepsilon_x} \mu(r) \geqslant -\|r\|_\infty$ . On en déduit que

$$\tau : \mathcal{R}(X) - \mathcal{R}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : r - s \longmapsto \tau(r) - \tau(s)$$

est une forme linéaire positive. Par continuité elle se prolonge en une forme linéaire positive (continue!) $\mu$ sur $\mathcal{C}(X)$ . On a trivialement $\mu \leqslant_{\mathcal{R}(X)} \nu$ pour tout $\nu \in M$ , donc $\mu \in M$ est évidemment $\mathcal{R}(X)$-minimale. □

**REMARQUE 1** Ce théorème ne nous permet pas encore de conclure que $Ch(X) \neq \emptyset$ , sauf dans le cas métrisable comme nous allons le voir. Dans le cas général nous aurons encore besoin du *principe du minimum* de Bauer que nous démontrerons dans le paragraphe qui suit.

**LEMME (Théorème de Hervé** [Her 1961]**)** *Pour que $X$ soit métrisable, il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue réelle $f$* strictement convexe *, i.e.*

$$f(x) < \alpha \cdot f(y) + (1-\alpha) \cdot f(z)$$

*pour tout $x, y, z \in X$ et $\alpha \in \left]0,1\right[$ tel que $x = \alpha \cdot y + (1-\alpha) \cdot z$ .*

*Dans ce cas on a*

$$Ch(X) = B_f \; .$$

Montrons tout d'abord, si $X$ est métrisable de métrique $d$ , que $\mathcal{C}(X)$ est de type dénombrable. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ soit

$$A_{m,n} := \left\{ f \in \mathcal{C}(X) \;\middle|\; d(x,y) \leqslant \frac{1}{m} \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n} \right\} \; .$$

Puisque toute fonction continue sur $X$ est uniformément continue on a

$$\mathcal{C}(X) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} A_{m,n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

et, par la compacité de $X$ , pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ , il existe une suite finie $(x_{m,j})_{j \in p(m)}$ telle que

$$X = \bigcup_{j \in p(m)} B\left(x_{m,j}, \frac{1}{m}\right) .$$

Soit $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q}$ et, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathbb{N}^{p(m)}$ , considérons

$$C_{m,n,\sigma} := \left\{ f \in A_{m,n} \;\middle|\; \left|f(x_{m,j}) - q_{\sigma(j)}\right| \leqslant \frac{1}{n} \right\} .$$

On a évidemment

$$A_{m,n} = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{p(m)}} C_{m,n,\sigma} ;$$

étant donné $f \in A_{m,n}$ et $j \in p(m)$ , il suffit de choisir $\sigma(j)$ tel que $q_{\sigma(j)} \in B\left(f(x_{m,j}), \frac{1}{n}\right)$ ! Pour tout $\sigma \in \mathbb{N}^{p(m)}$ tel que $C_{m,n,\sigma} \neq \emptyset$ , choisissons $f_{m,n,\sigma} \in C_{m,n,\sigma}$ et désignons par $D$ l'ensemble **dénombrable** de ces $f_{m,n,\sigma}$ . Etant donné $f \in A_{m,n}$ , soit $\sigma \in \mathbb{N}^{p(m)}$ tel que $f \in C_{m,n,\sigma}$ . Pour tout $x \in X$ , il existe $j \in p(m)$ tel que $x \in B\left(x_{m,j}, \frac{1}{n}\right)$ et il vient alors

$$|f(x) - f_{m,n,\sigma}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x) - f(x_{m,j})| + \left|f(x_{m,j}) - q_{\sigma(j)}\right| + \left|q_{\sigma(j)} - f_{m,n,\sigma}(x_{m,j})\right| + |f_{m,n,\sigma}(x_{m,j}) - f_{m,n,\sigma}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{n} .$$

Ceci finit de prouver que $D$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$ .

Puisque $\mathcal{R}(X) - \mathcal{R}(X)$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$ , on en déduit qu'il existe une partie dénombrable $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $-\mathcal{R}(X)$ qui soit totale dans $\mathcal{C}(X)$ et

$$f := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2 \cdot \|f_k\|_\infty} \cdot f_k$$

est une fonction convexe. Cette fonction est strictement convexe, car dans le cas contraire il existerait $x, y, z \in X$ et $\alpha \in \left]0,1\right[$ tels que $x = \alpha \cdot y + (1-\alpha) \cdot z$ et $f(x) = \alpha \cdot f(y) + (1-\alpha) \cdot f(z)$ . Chaque $f_k$ satisfait aussi à cette égalité, donc aussi tout $f \in \overline{\mathrm{lin}}\,(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*} = \mathcal{C}(X)$ par continuité, ce qui est absurde.

Pour tout $x \notin Ch(X)$ , il existe $y, z \in X$ et $\alpha \in \left]0,1\right[$ tels que $x = \alpha \cdot y + (1-\alpha) \cdot z$ . Pour tout $a \in \mathcal{A}(X)$ tel que $a \geqslant f$ , grâce à la convexité stricte on obtient

$$f(x) < \alpha \cdot f(y) + (1-\alpha) \cdot f(z) \leqslant \alpha \cdot a(y) + (1-\alpha) \cdot a(z) = a(\alpha \cdot y + (1-\alpha) \cdot z) = a(x) \;,$$

donc $f(x) < \widehat{f}(x)$ et par suite $B_f \subset Ch(X)$ . La proposition (iii) montre alors que $Ch(X) = B_f$ .

Réciproquement si $f$ est une fonction strictement convexe sur $X$ , la fonction

$$\omega : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x,y) \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \Big[f(x) + f(y)\Big] - f\left(\tfrac{x+y}{2}\right) .$$

est continue et en désignant par $\Delta$ la diagonale de $X \times X$ , on a

$$\Delta = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left\{ w < \frac{1}{k} \right\} ,$$

puisque $\omega(x, y) = 0$ est équivalent à $x = y$ par la convexité stricte. La structure uniforme définie par $\left(\left\{w < \frac{1}{k}\right\}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est moins fine que celle de $X$ et métrisable (cf. Bourbaki [Bou 1974], TG IX, §1, proposition 2, p. 6) de métrique $d$ . Puisque $X$ est compact et $\mathrm{id} : X \longrightarrow (X, d)$ est continue, ces deux espaces sont homéomorphe, ce qui finit de prouver que $X$ est métrisable.

□

**REMARQUE 2** E.M. Alfsen [Alf 1971], théorème I.4.3, p. 33, montre directement que les deux structures uniformes sont égales.

**COROLLAIRE (Théorème de Choquet)** *Si $X$ est métrisable, alors $Ch(X)$ est un $G_\delta$ et toute intégrale de Radon $\mathcal{R}(X)$-minimale est portée par $Ch(X)$ .*

*En particulier, pour tout $x \in X$ , il existe une intégrale de Radon $\mu$ représentant $x$ portée par $Ch(X)$ .*

**EXERCICE** Montrer directement, sans utiliser la notion d'ensemble bordant, que $Ch(X)$ est un $G_\delta$ .

## 1.5 Principe du minimum de Bauer

La version la plus générale du *principe du minimum* a été démontrée sur un espace topologique compact par H. Bauer [Bau 1960]. Nous nous contenterons de la version géométrique (sur un ensemble convexe compact) déjà démontrée dans [Bau 1958], en utilisant la démonstration de Choquet-Meyer [ChoMey 1963].

Nous aurons besoin de la caractérisation suivante :

**EXERCICE** Soient $X$ un espace topologique et $f : X \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ une fonction numérique. Soit

$$\mathrm{Gr}_{\geqslant} f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant f(x)\}$$

le surgraphe de $f$ . On définit de même le sous-graphe $\mathrm{Gr}_{\leqslant} f$ , ainsi que $\mathrm{Gr}_{>} f$ et $\mathrm{Gr}_{<} f$ .

Montrer :

(a) $f$ est s.c.i. si, et seulement si, son surgraphe $\mathrm{Gr}_{\geqslant} f$ est fermé.

(b) Si $X$ est une partie convexe d'un espace localement convexe, alors $f$ est convexe si, et seulement si, $\mathrm{Gr}_{\geqslant} f \subset X \times \mathbb{R} \subset \mathbb{F} \times \mathbb{R}$ est convexe.

**DÉFINITION 1** On dit qu'une partie compacte $A \subset X$ est une *face* si toute intégrale de Radon $\mu \in \mathcal{M}_{+}^{1}(X)$ telle que de barycentre $\int \iota \, d\mu \in A$ est portée par $A$ .

**LEMME (Mokobodzki** [Mok 1962b]**)** *Soit $f : X \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ une fonction s.c.i..*

*(i) $f$ atteint son minimum en un point de $X$ .*

*(ii) Si $f$ est convexe, alors*

$$f = \sup\nolimits_{a \in \mathcal{A}(X), a < f \text{ sur } X} a \ .$$

*(iii) Si $f$ est affine, la famille $\{a \in \mathcal{A}(X) \mid a < f \text{ sur } X\}$ est filtrante croissante.*

*(iv) On a*

$$f = \sup\nolimits_{r \in \mathcal{R}(X), r < f \text{ sur } X} r \ .$$

*Supposons maintenant que $f$ est concave.*

*(v) La famille $\{r \in \mathcal{R}(X) \mid r < f \text{ sur } X\}$ est filtrante croissante.*

*(vi) Si $\nu \leqslant_{\mathcal{R}(X)} \mu$ , alors $\int^* f \, d\nu \leqslant \int^* f \, d\mu$ .*

*(vii) L'ensemble $\{f = \min f(X)\}$ est une face.*

**Démonstration de (i)** Pour tout $\gamma > \inf f(X)$ , l'ensemble $\{f \leqslant \gamma\}$ est compact, donc $\bigcap_{\gamma > \inf f(X)} \{f \leqslant \gamma\} \neq \emptyset$ , puisque $(\{f \leqslant \gamma\})_{\gamma > \inf f(X)}$ est décroissant.

**Démonstration de (ii)** Le surgraphe $\mathrm{Gr}_{\geqslant} f$ est une partie convexe fermée de $F \times \mathbb{R}$ , donc l'intersection des demi-espaces ouvert qui la contienne. Si $x \in X$ et $\beta \in \mathbb{R}$ satisfont à $\beta < f(x)$ , il existe un tel demi-espace ne contenant pas $(x, \beta)$ . Ce demi-espace est alors nécessairement de la forme $\{(x, \alpha) \in F \times \mathbb{R} \mid a(x) < \alpha\}$ , où $a$ est une fonction affine continue sur $F$ , donc $a_{|X} \in \mathcal{A}(X)$ et $f > a_{|X}$ sur $X$ .

**Démonstration de (iii)** Etant donné $a, b \in \mathcal{A}(X)$ telles que $a, b < f$ sur $X$ , soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \leqslant a, b$ . Les ensembles $K_a := \mathrm{Gr}_{\leqslant} a \cap \mathrm{Gr}_{\geqslant} M$ et $K_b := \mathrm{Gr}_{\leqslant} b \cap \mathrm{Gr}_{\geqslant} M$ étant convexes et compacts, l'ensemble $\mathrm{co}(K_a \cup K_b)$ est convexe compact d'après l'exercice 1.3.5 et

$$\mathrm{co}(K_a \cup K_b) \subset \mathrm{Gr}_{<} f \ ,$$

donc $\mathrm{co}(K_a \cup K_b)$ est disjoint de $\mathrm{Gr}_{\geqslant} f$ ; par le théorème de séparation il existe un hyperplan fermé séparant strictement ces deux ensembles et on vérifie immédiatement que c'est le graphe d'une fonction affine continue $c$ sur $F$ telle que $a, b < c_{|X} < f$ sur $X$ .

**Démonstration de (iv)** La topologie induite par $F_\sigma$ sur $X$ est la même que celle induite par $F$ , puisque $F \longrightarrow F_\sigma$ est continue. Pour tout $x \in X$ et $\gamma < f(x)$ , l'ensemble $\{f > \gamma\}$ est un voisinage ouvert de $x$ et il existe une semi-norme faible de la forme $p = \max_{j \in n} \ell_j$ , où $(\ell_j)_{j \in n}$ est une suite finie de $F'$ , telle que

$$\{-p(\diamond - x) + \gamma > \min f(X)\} \subset \{f > \gamma\} \ .$$

On a donc $r := -p(\diamond - x) + \gamma \in \mathcal{R}(X)$ et $r \leqslant \gamma$ sur $\{f > \gamma\}$ et $r \leqslant \min f(X)$ hors de $\{f > \gamma\}$ , donc $r \leqslant f$ et $r(x) = \gamma$ .

**Démonstration de (v)** Etant donné $r, s \in \mathcal{R}(X)$ tels que $r, s < f$ sur $X$ , puisque $f - s$ est s.ci., elle atteint son minimum sur $X$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $r, s \leqslant f - \varepsilon$ . Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \leqslant r, s, f - \varepsilon$ . Les ensembles $K_{f-\varepsilon} := \mathrm{Gr}_{\leqslant}(f - \varepsilon) \cap \mathrm{Gr}_{\geqslant} M$ , $K_r := \mathrm{Gr}_{\leqslant} r \cap \mathrm{Gr}_{\geqslant} M$ et $K_s := \mathrm{Gr}_{\leqslant} s \cap \mathrm{Gr}_{\geqslant} M$ étant convexes et compacts et $K_r \cup K_s \subset K_{f-\varepsilon}$ , alors (exercice 1.3.5)

$$\mathrm{co}(K_r \cup K_s) = \overline{\mathrm{co}}(K_r \cup K_s) \subset K_{f-\varepsilon} \ .$$

La fonction $g$ sur $X$ définie par

$$g(x) := \sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid (x, \alpha) \in \mathrm{co}(K_r \cup K_s)\}$$

est concave s.c.s. par l'exercice ci-dessus et $g \leqslant f - \varepsilon$ . Comme d'après (ii) $g = \inf_{u \in \mathcal{R}(X), u \geqslant g} u$ et que $\{u \in \mathcal{R}(X) \mid u \geqslant g\}$ est filtrant décroissant, le théorème de Dini montre qu'il existe $u \in \mathcal{R}(X)$ tel que

$$r, s \leqslant g \leqslant u \leqslant f - \frac{\varepsilon}{2} < f \quad \text{sur } X \ .$$

**Démonstration de (vi)** C'est immédiat par (iv) et la propriété de Bourbaki :

$$\int^* f\, d\nu = \sup_{r \in \mathcal{R}(X), r < f \text{ sur } X} \int^* r\, d\nu \leqslant \sup_{r \in \mathcal{R}(X), r < f \text{ sur } X} \int^* r\, d\mu = \int^* f\, d\mu \ .$$

**Démonstration de (vii)** Il est clair que $\{f = \min f(X)\}$ est fermée, donc compacte. Si $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ , $\mu \leqslant_{\mathcal{R}(X)} \varepsilon_x$ et $x \in \{f = \min f(X)\}$ , alors $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$ et on obtient

$$\int \min f(X)\, d\mu \leqslant \int^* f\, d\mu \leqslant \int^* f\, d\varepsilon_x = f(x) = \min f(X) = \int \min f(X)\, d\mu \ ,$$

ce qui montre que $\int (f - \min f(X))\, d\mu = 0$ et par suite que $\mu(\{f > \min f(X)\}) = 0$ .

**THÉORÈME (Principe du minimum)** *Toute fonction concave s.c.i. $f$ sur $X$ à valeurs dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ atteint son minimum en un point extrémal.*

Par le principe de maximalité de Hausdorff sur l'ensemble ordonné par inclusion des faces, il existe une face minimale $A$ contenue dans $\{f = \min f(X)\}$ , puisque l'intersection d'une chaîne formée de faces est une face. Elle ne contient qu'un point, car dans le cas contraire si $x, y \in A$ et $x \neq y$ , il existerait une fonction affine continue $a \in \mathcal{A}(X)$ telle que $a(x) < a(y)$ et $\left\{a_{|A} = \min a(A)\right\}$ serait une face contenue dans $A$ et ne contenant pas $y$ . Ainsi $A = \{x\}$ est une face et $x$ est extrémal par la caractérisation de Bauer (proposition 1.3). □

**COROLLAIRE 1 (Choquet-Bishop-de Leeuw)** *Toute intégrale $\mathcal{R}(X)$-minimale $\mu$ est portée par tout ensemble $K_\sigma$ contenant $Ch(X)$ .*

*En particulier $\check{S}(X)$ est la plus petite partie fermée $A$ de $X$ telle que tout point $x \in X$ soit représenté par une intégrale de Radon portée par $A$ .*

Il nous suffit de montrer que tout ensemble $G$ intersection d'une suite (décroissante) $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de $X$ et disjoint de $Ch(X)$ est de mesure nulle, donc que pour tout compact $K \subset G$ , on a $\mu(K) = 0$ . Puisque $X$ est complétement régulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ , il existe $g_k \in \mathcal{C}_+(X)$ telle que $1_K \leqslant g_k \leqslant 1_{U_k}$ . Posons $f_k := \min_{j\in k+1} g_j$ . La suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_+(X)$ est décroissante et

$$1_K \leqslant \inf\nolimits_{k\in\mathbb{N}} f_k \leqslant 1_G \ ,$$

et il nous suffit de montrer que $\mu(\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k) = 0$ .

Remarquons maintenant, puisque $\mu$ est $\mathcal{R}(X)$-minimale, que pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$ , on a

$$\sup\nolimits_{t\in-\mathcal{R}(X),t\leqslant f} \mu(t) = -\inf\nolimits_{r\in\mathcal{R}(X),r\geqslant -f} \mu(r) = -\widehat{\mu}(-f) = -\mu(-f) = \mu(f) \ .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ , il existe donc $t_0 \in -\mathcal{R}_-(X)$ telle que $t_0 \leqslant f_0 = g_0$ et $\mu(f_0) \leqslant \mu(t_0) + \varepsilon$ . Nous allons construire par récurrence une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset -\mathcal{R}_-(X)$ décroissante telle que

$$t_k \leqslant f_k \qquad \text{et} \qquad \mu(f_k) \leqslant \mu(t_k) + \varepsilon \ .$$

Si $t_k$ a été définie, on a $\widetilde{\varepsilon} := \mu(t_k) - \mu(f_k) + \varepsilon > 0$ et il existe $t_{k+1} \in -\mathcal{R}(X)$ telle que

$$t_{k+1} \leqslant \min(t_k, f_{k+1}) \qquad \text{et} \qquad \mu(\min(t_k, f_{k+1})) \leqslant \mu(t_{k+1}) + \widetilde{\varepsilon} \ .$$

On a évidemment $t_{k+1} \leqslant t_k$ , $t_{k+1} \leqslant f_{k+1}$ , $\max(t_k, f_{k+1}) \leqslant f_k$ et

$$\mu(f_{k+1}) = \mu(t_k + f_{k+1}) - \mu(t_k) = \mu(\min(t_k, f_{k+1})) + \mu(\max(t_k, f_{k+1})) - \mu(t_k) \leqslant$$

$$\leqslant \mu(t_{k+1}) + [\mu(t_k) - \mu(f_k) + \varepsilon] + \mu(f_k) - \mu(t_k) = \mu(t_{k+1}) + \varepsilon \ .$$

On en déduit que

$$\mu(\inf\nolimits_{k\in\mathbb{N}} f_k) \leqslant \mu(\inf\nolimits_{k\in\mathbb{N}} t_k) + \varepsilon$$

et il nous suffit de montrer que $\inf_{k\in\mathbb{N}} t_k = 0$ . Mais

$$-\inf\nolimits_{k\in\mathbb{N}} t_k = \sup\nolimits_k -t_k \in \mathcal{R}_{\sigma,-}(X)$$

est une fonction concave s.c.i., donc atteint sa borne inférieure sur $Ch(X)$ par le principe du minimum. Ainsi $\inf_{k\in\mathbb{N}} t_k$ atteint sa borne supérieure sur $Ch(X)$ et

$$0 \leqslant \inf\nolimits_{k\in\mathbb{N}} t_k \leqslant \inf\nolimits_{k\in\mathbb{N}} f_k \leqslant \inf\nolimits_{k\in\mathbb{N}} g_k \leqslant \inf\nolimits_{k\in\mathbb{N}} 1_{U_k} = 1_G$$

s'annule sur $Ch(X)$ .

La dernière partie est évidente puisque $\check{S}(X)$ est un $K_\sigma$ . □

**REMARQUE 1** Le théorème de Krein-Milman en découle comme nous l'avons démontré en 1.3.

**COROLLAIRE 2** *La fermeture* $\overline{\mathcal{A}(X)}$ *de* $\mathcal{A}(X)$ *dans* $\mathcal{C}(X)$ *est formé des fonctions affines continues sur* $K$ *.*

Si $f$ est une fonction affine continue sur $X$ , les assertions (ii) et (iii) du lemme montrent que $f$ est l'enveloppe supérieure de la famille filtrante croissante des $a \in \mathcal{A}(X)$ tels que $a < f$ sur $X$ . Le théorème de Dini permet de conclure. □

**REMARQUE 2** Choquet a également prouvé un théorème d'unicité. Pour que tout point $x \in X$ possède une unique intégrale de Radon $\mathcal{R}(X)$-minimale, il faut et il suffit que $X$ soit un *simplexe de Choquet* , i.e. que l'ensemble des $\alpha \cdot X + a$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in F$ soit stable par intersection finie.

## 1.6 Espaces vectoriels de fonctions continues réelles

Soit $X$ un espace compact non-vide et $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel (réel) de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ contenant les constantes et séparant les points de $X$ , muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$ . C'est un espace normé. Pour tout $x \in X$ , soit

$$\varepsilon_x^{\mathcal{A}} : a \longmapsto a(x) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

la forme linéaire d'évaluation en $x$ sur $\mathcal{A}$; elle est continue de norme $1$ , puisque $1 \in \mathcal{A}$ . Considérons l'application

$$\varepsilon^{\mathcal{A}} : X \longrightarrow \mathcal{A}' : x \longmapsto \varepsilon_x^{\mathcal{A}} .$$

Elle est injective puisque $\mathcal{A}$ sépare les points de $X$ . En munissant $\mathcal{A}'$ de la topologie faible $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ , l'application $\varepsilon^{\mathcal{A}}$ est continue, donc un homéomorphisme sur son image $\varepsilon^{\mathcal{A}}(X)$ . Remarquons que $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel ordonné, pour l'ordre induit par celui de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ , que 1 est une unité pour l'ordre et qu'elle définit la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ par

$$\|a\|_{\infty} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid -\alpha \cdot 1 \leqslant a \leqslant \alpha \cdot 1\} .$$

Toute forme linéaire positive (sur $\mathcal{A}_+$ ) est donc continue et si $\mathbb{S}_+^{\mathcal{A}'}$ désigne la partie positive de la sphère unité, alors

$$\mathbb{S}_+^{\mathcal{A}'} = \{\eta \in \mathcal{A}^* \mid \eta \text{ positive et } \eta(1) = 1\} .$$

Elle est convexe compacte et en outre l'enveloppe fermée convexe de $\varepsilon^{\mathcal{A}}(X)$ . On peut lui appliquer la théorie de l'exemple précédent.

Mais on peut aussi considérer la théorie des représentations intégrales dans un ensemble convexe compact $X$ de $F$ comme un cas particulier de la situation présente, où $\mathcal{A}$ est l'espace vectoriel $\mathcal{A}(X)$ des restrictions à $X$ des fonctions affines continues sur $F$ . Dans ce cas $X$ est isomorphe à $\mathbb{S}_+^{\mathcal{A}'}$ .

Il est également utile de considérer l'adhérence $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ . Si $X$ est un ensemble convexe compact, alors cette fermeture est égale à l'espace vectoriel des fonctions affines continues sur $X$ (corollaire 1.5.2).

Pour développer une théorie analytique, par opposition à géométrique, dans ce cadre typiquement analyse fonctionnelle, considérons l'injection canonique $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}(X)$ . Son adjointe $\iota' : \mathcal{M}(X) := \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)' \longrightarrow \mathcal{A}'$ est surjective par le théorème de Hahn-Banach. Il en est de même de $\iota' : \mathcal{M}_+(X) \longrightarrow \mathcal{A}'_+$ . Pour tout $x \in X$ et $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ , l'égalité $\mu_{|\mathcal{A}} = \iota'(\mu) = \varepsilon_x^{\mathcal{A}}$ signifie que

$$\mu(a) = a(x) \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A} ,$$

ou encore que l'image par $\varepsilon^{\mathcal{A}}$ de $\mu$ dans $\mathbb{S}_+^{\mathcal{A}'}$ représente le point $\varepsilon_x^{\mathcal{A}} \in \mathbb{S}_+^{\mathcal{A}'}$ . Nous dirons encore que $\mu$ représente $x$ (par rapport à $\mathcal{A}$ ) et on obtient évidemment les mêmes résultats que précédemment. Par exemple on dit qu'un point $x \in X$ est $\mathcal{A}$-extrémal si $\varepsilon_x$ est la seule intégrale de Radon qui représente $x$ .

On a unicité des représentations intégrales si, et seulement si, $\mathcal{A}'_+$ est réticulé pour son ordre propre $\leqslant_{\mathcal{A}'_+}$ défini par $\eta \leqslant_{\mathcal{A}'_+} \eta'$ si $\eta' - \eta \in \mathcal{A}'_+$ . Ceci est équivalent à ce que $\overline{\mathcal{A}}$ satisfasse à la *propriété d'interpolation de Riesz* :

Pour tout $a, a', b, b' \in \overline{\mathcal{A}}$ tels que $a, a' \leqslant b, b'$ , il existe $c \in \mathcal{A}$ tel que

$$a, a' \leqslant c \leqslant b, b' \ ,$$

ou bien à la *propriété de décomposition de Riesz* :

Pour tout $a, a', c \in \overline{\mathcal{A}}_+$ tels que $c \leqslant a + a'$ , il existe $b, b' \in \overline{\mathcal{A}}_+$ tels que

$$b \leqslant a \quad , \quad b' \leqslant a' \quad \text{et} \quad c = b + b' \ .$$

Ce changement de point de vue n'est pas gratuit. Il a permi à D.A. Edwards [Edw 1965] de formuler une généralisation que l'on utilise dans l'étude des algèbres de fonctions complexes. A la place d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ , il considère un conoïde $\mathcal{R}$ de fonctions s.c.i. sur $X$ , contenant les constantes et séparant les points de $X$ . Dans ce cas on dit que $\mu$ représente $x$ (par rapport à $\mathcal{R}$ ) si l'on a

$$\mu(r) \leqslant r(x) \quad \text{pour tout } r \in \mathcal{R} \ .$$

## 1.7 Espaces vectoriels et algèbres de fonctions continues complexes

**Soient $X$ un espace compact non-vide**
**et**
**$A$ un sous-espace vectoriel (complexe) de $C_{\mathbb{C}}(X)$**
**contenant les constantes et séparant les points de $X$ .**

L'ensemble $\operatorname{Re}\mathcal{A}$ des parties réelles $\operatorname{Re} a$ des fonctions $a \in \mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ . Il contient aussi $\operatorname{Im} a = \operatorname{Re}(-ia)$ , donc $\operatorname{Re}\mathcal{A}$ contient les constantes et sépare les points de $X$ . On peut appliquer les résultats précédents à $\operatorname{Re}\mathcal{A}$ et on obtient par exemple que pour tout $a \in \mathcal{A}$ , la fonction $|a|$ atteint sa borne supérieure en un point de $Ch(X)$ . La frontière de Šhilov se caractérise avec la modification correspondante de la même manière que précédemment.

Si $\mathcal{A}$ est en plus une sous-algèbre (complexe) de $\mathcal{C}(X)$ , alors le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ engendré par $\ln|Inv(\mathcal{A})|$ contient les constantes et sépare les points de $X$ . Une intégrale de Radon $\mu$ sur $X$ représente $x \in X$ par rapport à $\ln|Inv(\mathcal{A})|$ si, et seulement si, pour tout $a \in \mathcal{A}$ , on a

$$\int \ln|a| \, d\mu = \ln|a|(x) \quad \text{pour tout } a \in Inv(\mathcal{A}) \ .$$

On dit que c'est une *intégrale de Arens-Singer* [AreSin 1954] . Remarquons que $\mu$ représente également $x$ par rapport à $\operatorname{Re}\mathcal{A}$ .

On peut également considérer le conoïde $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ engendré par les fonctions de la forme $-\ln|a|$ pour $a \in \mathcal{A}$ . Une intégrale de Radon $\mu$ sur $X$ représente $x \in X$ par rapport à $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ si, et seulement si, pour tout $a \in \mathcal{A}$ , on a l'*inégalité de Jensen-Hartogs* [Jen 1899], [Har 1906]

$$\ln|a|(x) \leqslant \int^{*} \ln|a| \, d\mu \ .$$

On dit que $\mu$ est une *intégrale de Jensen* .

On peut utiliser ces méthodes pour étudier par exemple les algèbres de fonctions suivantes. Soit $X$ une partie compacte de $\mathbb{C}$ . Nous désignerons par $\overline{\mathcal{P}(X)}$ et $\overline{\mathcal{R}(X)}$ les sous-algèbres des fonctions de $\mathcal{C}(X)$ qui peuvent être approximées uniformément sur $X$ par des polynômes et respectivement des fonctions rationnelles avec pôles hors de $X$ , et par $\mathcal{O}(X)$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ qui sont holomorphes à l'intérieur de $X$ . La frontière de Šhilov de $\overline{\mathcal{R}(X)}$ est égale à la frontière topologique $\operatorname{Fr}(X)$ de $X$ , celle de $\overline{\mathcal{P}(X)}$ est la frontière topologique extérieure de $X$ , i.e. $\operatorname{Fr}\left(\widehat{X}\right)$ où $\widehat{X}$ désigne la réunion de $X$ et des composantes connexes bornées de $\complement X$ . On en déduit le *théorème de Runge* qui affirme, si $X$ est de complémentaire connexe, que que toute fonction holomorphe dans un voisinage ouvert de $X$ peut être approximée uniformément sur $X$ par des polynômes. Voici encore quelques théorèmes intéressants.

*Hartogs-Rosenthal :* Pour que $\mathcal{C}(X) = \overline{\mathcal{R}(X)}$ , il faut et il suffit que que $\lambda_{\mathbb{C}}(X) = 0$ .

*Lavrentiev :* $\mathcal{C}(X) = \overline{\mathcal{P}(X)}$ si, et seulement si, $X$ est de complémentaire connexe et d'intérieur vide.

*Mergelyan* [Mer 1952], [GonMer 1965] *:* Si $X$ est de complémentaire connexe, alors $\mathcal{O}(X) = \overline{\mathcal{P}(X)}$ .

Le théorème de Lavrentiev est évidemment un cas particulier de celui de Mergelyan puisque, si $X$ est d'intérieur vide on a $\mathcal{O}(X) = \mathcal{C}(X)$ .

Si maintenant $X$ est un espace compact non-vide et $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ , contenant les constantes et séparant les points de $X$ , E. Bishop [Bis 1959] a démontré le théorème suivant :

Soit $x \in X$ . Le point $x$ possède un système fondamental dénombrable de voisinages et $x \in Ch(X)$ si, et seulement si, il existe $a \in \mathcal{A}$ telle que $|a(y)| < |a(x)|$ pour tout $y \neq x$ .

On en déduit pour $\overline{\mathcal{R}(X)}$ , si $X$ est un ensemble compact de $\mathbb{C}$ et $\lambda_{\mathbb{C}}(X \setminus Ch(X)) = 0$ , que $\mathcal{C}(X) = \overline{\mathcal{R}(X)}$ . En particulier $\mathcal{C}(X) = \overline{\mathcal{R}(X)}$ si, et seulement si, $X = Ch(X)$ .