Charakterisierung der Schnittmultiplizität

Satz. Es gibt genau eine Abbildung, die je zwei Polynomen $f, g \in K[X, Y]$ und einem Punkt $p \in \mathbb{A}^2$ ein Element

$$I(f, g, p) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

zuordnet – das die *Schnittmultiplizität* von f und g in p genannt wird – so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(1) Es ist $I(f, g, p) = \infty$ genau dann, wenn $V(f)$ und $V(g)$ eine gemeinsame Komponente haben, die durch p geht.

(2) Es gilt $I(f, g, p) = 0$ genau dann, wenn $p \notin V(f) \cap V(g)$ ist.

(3) Ist $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ eine affine Transformation, so gilt

$$I(f, g, p) = I(\varphi^* f, \varphi^* g, \varphi^{-1}(p))$$

(Invarianz unter affinen Transformationen)

(4) $I(f, g, p) = I(g, f, p)$ (Symmetrie)

(5) $I(X, Y, (0, 0)) = 1$

(6) $I(f_1 f_2, g, p) = I(f_1, g, p) + I(f_2, g, p)$ (Additivität)

(7) $I(f, g, p) = I(f, g + hf, p)$