

Übungen zur Analysis 1

– Blatt 1 –

Abgabe Donnerstag, 21.04.2011 bis 16:30

Auf den Lahnbergen: Ebene A8

Im Renthof 5: 4. Stock Treppenabsatz

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren:

$$d^* : \begin{cases} X \times X & \rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) & \mapsto \min(1, d(p, q)) \end{cases}$$

Man beweise, dass (X, d^*) ebenfalls ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 2 (Verschiedene Metriken in \mathbb{R}^2 : 11 Punkte).

- a) Man zeige, dass die folgenden Abbildungen $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils Metriken auf \mathbb{R}^2 definieren und beschreibe die Epsilon-Kugeln.

Maximums-Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$$

Manhattan-Taxi-Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

French-Railroad-Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} d_{\text{Eu}}(x, y) & \text{falls } (x_1, x_2) \text{ und } (y_1, y_2) \text{ linear abhängig} \\ d_{\text{Eu}}(x, 0) + d_{\text{Eu}}(y, 0) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $d_{\text{Eu}}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ die euklidische Metrik ist

- b) Wie erklären sich die Namen der “Manhattan-Taxi” und “French-Railroad” Metrik?
c) In welchem Punkt unterscheidet sich die French-Railroad-Metrik grundlegend von den anderen beiden?

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ mit der Abstandsfunktion

$$d(m, n) = \begin{cases} |n - m| & \text{falls } n \neq 1, m \neq 1 \\ \sqrt{m} & \text{falls } n = 1, m \neq 1 \\ \sqrt{n} & \text{falls } n \neq 1, m = 1 \\ 0 & \text{falls } n = m = 1 \end{cases}$$

Ist (\mathbb{N}, d) ein metrischer Raum?

Aufgabe 4 (3 Punkte). Man beweise die beiden folgenden Ungleichungen für beliebige $x \in \mathbb{R}, x \geq 0, n \in \mathbb{N}$:

a)

$$1 + nx \leq (1 + x)^n \quad (\text{Bernoulli Ungleichung}),$$

b)

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2 \leq (1+x)^n.$$

Literatur zur Vorlesung:

- Martin Barner und Friedrich Flohr, *Analysis, Bd. 1 und 2*, Walter de Gruyter, 3. Auflage 1987.
- Christian Blatter, *Analysis*, Bd. 1–2 (neue Aufl.) bzw. Bd. 1–3 (alte Aufl.), Springer Verlag, ab 1974.
- Otto Forster, *Analysis*, vol. 1–3, Vieweg Grundkurs Mathematik, ab 1976.
- Krzysztof Maurin, *Analysis*, vol. 1–3, D. Reidel Publ. Company and PWN - Polish Scient. Publ., Dordrecht / Warsaw, ab 1980 (in engl. Spr.).
- Walter Rudin, *Analysis*, Oldenbourg Verlag, dt. Übers. von 1998 oder engl. Originalausg., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1964.
- Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley, 1965.
- Heuser Harro, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Teubner, 2002
- Königsberger Konrad, *Analysis 1*, Springer, 2009