Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis 1

– Blatt 3 –

Abgabe Freitag, 06.05.2011 vor der Vorlesung bis 8:10

Aufgabe 9 (3 Punkte). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_1, x_2, \ldots$ eine konvergente Folge von Punkten in X. Man zeige, dass $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Man berechne den jeweiligen Grenzwert in $\mathbb{R}$ der nachstehenden Folgen für $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{5n+1}{7n-2}\ , \quad \frac{2n^2+5}{3n^3-1}\ , \quad \frac{\sum_{k=0}^{n} k^2}{n^3}\ , \quad \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}$$

Aufgabe 11 (Äquivalenz von Metriken: 5 Punkte). Sei X eine Menge und d und d' zwei Metriken auf X. Dann heißen d und d' topologisch äquivalent falls:

$$\forall\ x \in X \text{ und } \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \epsilon' > 0 : K_d(x, \epsilon') \subset K_{d'}(x, \epsilon)$$

und

$$\forall\ x \in X \text{ und } \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \epsilon' > 0 : K_{d'}(x, \epsilon') \subset K_d(x, \epsilon)$$

a) Seien d und d' zwei äquivalente Metriken auf X. Man zeige, dass eine Folge $x_1, x_2, \dots \in X$ genau dann bezüglich d konvergiert, wenn sie bezüglich d' konvergiert und die Grenzwerte sind identisch.

b) Welche der Metriken aus Aufgabe 2 sind topologisch äquivalent zur euklidschen Metrik?

Aufgabe 12 (Rekursiv definierte Folgen: 4 Punkte). Sei $c > 0$ und sei eine Folge in $\mathbb{R}$ gegeben durch $a_1 = \sqrt{c}$ und $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$. Man zeige, dass die so definierte Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.

Aufgabe 13 (Zusammengesetzte Folgen: 3 Punke). Seien $\{a_n\}, \{b_n\}$ Folgen in einem metrischen Raum (X, d). Sei:

$$c_n := \begin{cases} a_{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ b_{(n+1)/2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Man zeige, dass $\{c_n\}$ genau dann gegen $x \in X$ konvergiert, wenn $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gegen x konvergieren.