Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis 1
– Blatt 6 –
Abgabe Freitag, 27.05.2011 vor der Vorlesung bis 8:10

Aufgabe 22 (4 Punkte). Seien (X, d_x) und (Y, d_y) vollständige Räume. Man zeige, dass dann auch das kartesische Produkt der beiden Räume vollständig ist.

Aufgabe 23 (4 Punkte). Geben Sie ein Beispiel eines vollständigen metrischen Raumes X sowie einer Abbildung $f : X \to X$ derart an, dass $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle $x \neq y$ gilt, jedoch f keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 24 (4+4 Punkte). Sei M die Menge aller beschränkten Folgen reeller Zahlen.

a) Sei $d(x, y) := \sup\{\ |x_n - y_n|\ :\ n \in \mathbb{N}\}$, wobei $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ zwei beliebige Elemente aus M sind. Man zeige, dass d dann eine Metrik auf M ist.

b) Ist die abgeschlossene Einheitskugel

$\overline{K(0,1)} = \{x \in M, d(x, 0) \leq 1\}$ (wobei $0 \in M$ die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ ist)

in (M, d) kompakt?

c) (*Zusatzaufgabe +4 Punkte*) Man zeige, dass (M,d) vollständig ist.

Hinweis: Man zeigen zuerst, dass, falls $x^k = (x^k_n)_{n=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, 3, ...$ eine Cauchy-Folge von Elementen aus M ist, für jedes fixierte n_0 auch $x^1_{n_0}, x^2_{n_0}, x^3_{n_0}...$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen ist.

Aufgabe 25 (4 Punkte). Sei $D > 0$. Fixiere eine beliebige positive Zahl x_0 und definiere

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{D}{x_{n-1}}\right)$$

Man zeige, dass x_n gegen $\sqrt{D}$ konvergiert. Was folgt daraus für die Vollständigkeit von $\mathbb{Q}$?