Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis 1

– Blatt 7 –

Abgabe Freitag, 10.06.2011 vor der Vorlesung bis 8:10

Aufgabe 26 (4 Punkte). Man zeige mit der Überdeckungseigenschaft (!), dass die Menge $M_1 := \{\frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ kompakt ist, die Menge $M_2 := \{\frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ jedoch nicht. Wie sieht man viel leichter ein, dass M_2 nicht kompakt ist?

Aufgabe 27 (3 Punkte).

a) Man zeige, dass in $(\mathbb{R}^2, d_{FR})$ (wobei d_{FR} die French Railroad Metrik aus Aufgabe 2 ist) nicht jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt (Eine analoge Aussage zum Satz von Bolzano-Weierstrass gilt also hier nicht).9

b) Sind in $(\mathbb{R}^2, d_{FR})$ alle abgeschlossenen beschränkten Mengen kompakt?

Aufgabe 28 (4 Punkte). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ heißt lokal beschränkt, falls für alle $x \in X$ eine Zahl $\epsilon_x > 0$ existiert, sodass f auf der ϵ_x-Umgebung von x beschränkt ist (d.h. $\exists C_x > 0 : \forall x' \in K(x, \epsilon_x)\ |f(x')| \leq C_x$).

a) Man gebe einen metrischen Raum (X, d) sowie eine lokal beschränkte Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ an, die nicht auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Man gebe außerdem eine Abbildung $g : X \to \mathbb{R}$ an, die nicht lokal beschränkt ist.

b) Man zeige, dass jede lokal beschränkte Abbildung auf einem kompakten metrischen Raum beschränkt ist.

Aufgabe 29 (4 Punkte). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ heißt lokal konstant falls für alle $x \in X$ eine Zahl $\epsilon_x > 0$ existiert, sodass f auf der ϵ_x-Umgebung von x konstant ist.

a) Man zeige, dass für zusammenhängendes X jede lokal konstante Funktion konstant ist.

b) Man zeige, dass jede lokal konstante Funktion auf jeder Zusammenhangskomponente konstant ist.

Aufgabe 30 (4 Punkte). In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jeder kompakte Raum vollständig ist und die Hausdorff-Eigenschaft besitzt. Zeigen Sie die Umkehrung dieses Sachverhaltes. Insgesamt ist also ein metrischer Raum genau dann kompakt, falls er vollständig ist und die Hausdorff-Eigenschaft hat.

Aufgabe 31 (3 Punkte). Begründen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und berechnen Sie den Wert dieser Reihe für:

a) $a_n = \dfrac{2^n + 3^n}{6^n}$

b) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

c) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$

Hinweis zu b) und c): Zur Bestimmung der Grenzwerte ist eine Partialbruchzerlegung hilfreich.

Aufgabe 32 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ konvergent ist, aber dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ nicht konvergent ist.