Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis 1
– Blatt 9 –
Abgabe Freitag, 24.06.2011 vor der Vorlesung bis 8:10

Aufgabe 38 (4 Punkte). Sei $z \in \mathbb{C}$ eine bliebige komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Man nutze das Cauchy Produkt

Aufgabe 39 (4 Punkte). Die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen sind wie folgt definiert:

$$\sinh : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{2}\left(\exp(z) - \exp(-z)\right) \end{cases} \qquad \cosh : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{2}\left(\exp(z) + \exp(-z)\right) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

b) $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$
$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Aufgabe 40 (4 Punkte). Beweisen Sie, dass jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ als Wert einer Umordnung der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n}$ realisiert werden kann. Gilt dieser Sachverhalt für eine beliebige konvergente, nicht absolut-konvergente Reihe komplexer Zahlen?

Aufgabe 41 (4 Punkte). Beweisen Sie:

a.) $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (Hinweis: Ist $-1 < x < 0$, so gilt $|e^{-x} - 1| \leq \dfrac{|x|}{1-|x|}$ - siehe Vorlesung)

b.) $e^{\frac{y}{1+y}} \leq 1 + y$ für alle $y > -1$. (Hinweis: Setze $x = -\dfrac{y}{1+y}$)

c.) $\dfrac{y}{1+y} \leq \ln(1+y) \leq y$ für $y > -1$.