Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis 1

– Ferienblatt –

Abgabe Freitag, 21.10.2011 vor der Vorlesung bis 8:10

Aufgabe 50 (3 Punkte).

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$a_n = \frac{z^n}{n^2} \quad , \quad a_n = \frac{(z-z_0)^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0, z_0 \in \mathbb{C}).$$

Aufgabe 51 (4 Punkte).

a) Beweisen Sie, dass für alle $r > 0$ die Funktionenreihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{x^2 + n^2}$ auf $[-r, r]$ gleichmäßig konvergent ist. Folgern Sie, dass $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

b) Betrachten Sie die Funktionenreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-nx)}{x^2 - 1 + n}$. In welchen Punkten x konvergiert sie punktweise? Auf welchen Intervallen konvergiert sie gleichmäßig? Was folgt daraus für die Stetigkeit der Grenzfunktion f?

Aufgabe 52 (4 Punkte).

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben und eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ x^n & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

Man zeige, dass diese Funktion auf $\mathbb{R}$ $(n-1)$-mal differenzierbar ist, aber nicht n-mal und man berechne die Ableitungen $f^{(k)}$ für $1 \leq k < n$.

Aufgabe 53 (4 Punkte).

Wir betrachten $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x+iy) = \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}$ für $z = x + iy \neq 0$ und $f(0) = 0$. Beweisen Sie, dass f in $0 \in \mathbb{C}$ keine Ableitung besitzt. Zeigen Sie weiterhin, dass $\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z}$ immer existiert, wenn z gegen 0 auf einer festen Geraden $0 \in L \subset \mathbb{C}$ konvergiert.

Aufgabe 54 (4 Punkte).

Man betrachte folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

Man zeige, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch f' in 0 nicht stetig ist.

Aufgabe 55 (4 Punkte).

Man beweise den Satz von Rolle: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so existiert ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.