Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Sommersemester 2011

Vorlesung über Analysis I

–

K L A U S U R

–

Samstag, den 16.7.2011

Aufgabe 1 (2 Punkte).

1. Man untersuche ob die Folge $a_n = \frac{(9n+4)^2}{3n^2+4n+2}$ für $n \to \infty$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.
2. Man untersuche, ob die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3+\sqrt{n}}$ konvergent ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Man beweise, daß der Kegel

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge im $\mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Metrik ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Man untersuche, ob für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^2 e^{iy}}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existiert. Ist f stetig in $(0, 0)$?

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $a > 0$ eine feste positive Zahl. Man zeige, daß die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{x+in}}{n^{1+a}}$$

für alle $r > 0$ auf dem Intervall $[-r, r]$ gleichmäßig konvergiert und begründe, daß durch diese Reihe eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

Aufgabe 5 (4 Punkte).

1. Man beweise, daß
$$f_n(x) = \frac{n \ln x}{n + x + 2}$$
auf $[1, 2]$ gleichmäßig konvergiert.
2. Man zeige, daß auf $\mathbb{R}$
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{1+x^2} & x \in [n, 2n] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
punktweise, jedoch nicht gleichmäßig gegen $f = 0$ konvergiert.

b/w

Aufgabe 6 (2 Punkte). Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Man berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(z - z_0)^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 7 (3 Punkte). Man beweise folgende Aussage: Ist $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion, so besitzt f einen Fixpunkt.

Hinweis: Man betrachte die Hilfsfunktion $h(x) := f(x) - x$.

Aufgabe 8 (3+3 Punkte).

A. Man löse folgende Aufgaben:

1. Man erläutere die Definition des Limes superior für eine Folge $\{x_n\}$ reeller Zahlen.
2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Man formuliere auf zwei äquivalente Weisen, was es bedeutet, daß X kompakt ist.
3. Erklären Sie das Cauchy–Produkt zweier Reihen komplexer Zahlen. Wann ist dasselbige absolut konvergent?

B. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.

1. Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen ist genau dann stetig, falls eine offene Menge $U \subset Y$ derart existiert, daß $f^{-1}(U)$ offen ist.

   ☐ richtig ☐ falsch

2. Sind X und Y kompakte metrische Räume, so ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ auch gleichmäßig stetig.

   ☐ richtig ☐ falsch

3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n^2)}$ ist konvergent.

   ☐ richtig ☐ falsch

4. Ein zusammenhängender Raum, welcher die Hausdorff–Eigenschaft besitzt, ist notwendig kompakt.

   ☐ richtig ☐ falsch

5. Sei I_n eine Folge nicht-leerer, abgeschlossener Intervalle mit $I_{n+1} \subset I_n$, deren Länge gegen null geht. Dann besteht deren Durchschnitt aus genau einer Zahl.

   ☐ richtig ☐ falsch

6. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}^d$ und gelte $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1/2$. Dann ist die Reihe konvergent.

   ☐ richtig ☐ falsch

Bearbeitungszeit: 2 Stunden und 30 Minuten.