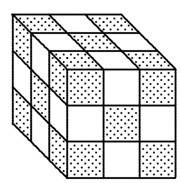
Denkspiele aus aller Welt (2)

Claus Michael Ringel

Es gibt eine Vielzahl von Denkspielen, von Geduldsund Geschicklichkeitsspielen, die einen mathematischen Hintergrund besitzen. In diesem zweiten Teil widmen wir uns Puzzles unter dem Oberthema **Kubus** (oder Würfel), auch diesmal kann allerdings nur eine kleine Auswahl besprochen werden. Gedacht ist dabei an den Soma-Würfel und seine Varianten, an Würfel, die an einem Gummizug aufgereiht sind und zu einem größeren Würfel zusammengesetzt werden können, aber auch an das Innenleben eines Würfels, das analysiert werden soll: dabei denken wir vor allem an die Konfiguration der Raumdiagonalen und an die sechs Viereckspyramiden mit einer Würfelfläche als Grundfläche und dem Würfelmittelpunkt als Spitze. Die hier vorgestellten Denkspiele sind fast alle im Handel erhältlich, viele können aber mühelos selbst hergestellt werden.

Das Verständnis der jeweiligen mathematischen Grundprinzipien gibt dem Mathematiklehrer die Möglichkeit, derartige Materialen im Unterricht an geeigneten Stellen gezielt einzusetzen, andererseits können auf diese Weise Grundbegriffe der Mathematik anschaulich erläutert werden. Beim Arbeiten mit Denkspielen lernt man sehr viel über die Entwicklung von Lösungsstrategien, auch erhält man auf diese Weise interessante Problemstellungen, deren Komplexität abgeschätzt und ziemlich beliebig variiert werden kann.

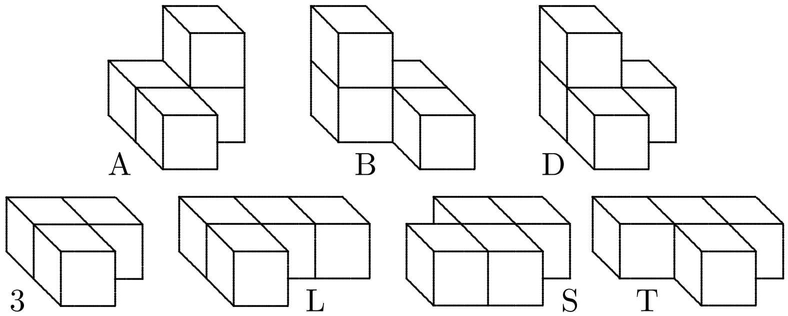
1. Der Soma-Würfel



Der Soma-Würfel wurde von Piet Hein entworfen: man erzählt, daß er als Student in einer Vorlesung von Werner Heisenberg über Quantenphysik saß, in der auch Raum-Vorstellungen diskutiert wurden, daß er dabei seinen eigenen Gedanken nachhing und sich dabei die folgende Frage stellte: Ein Würfel mit Kantenlänge 3 kann in 27 Einzelwürfel mit Kantenlänge 1 zerlegt werden. Man klebe jeweils höchstens vier solcher Einzelwürfel aneinander und versuche nun den großen Würfel aus diesen "Soma-Teilen" zusammenzusetzen. Er stellte fest, daß es beim Zusammenkleben genau sieben Möglichkeiten gibt, die keine Quader liefern (und

SEDIMA-Vortrag, Bielefeld, Dezember 1998. Für vielfältige Hilfestellungen bin ich Barbara Ringel zu besonderem Dank verpflichtet. Insbesondere habe ich durch sie (vor vielen Jahren) den Soma-Würfel und seine Geheimnisse kennengelernt.

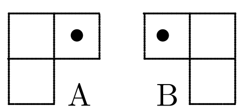
zwar einen Dreierstein und sechs Vierersteine). Hier sind diese Soma-Steine:



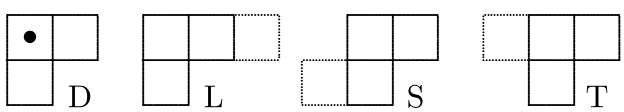
Beim Bau dieser sieben Soma-Teile werden genau 27 $(= 3 + 6 \cdot 4)$ Einzelwürfel verwendet, und man kann sie wirklich zu einem Würfel mit Kantenlänge 3 zusammensetzen.

Es gibt sehr viele Lösungen für diese Aufgabenstellung, insgesamt gibt es genau 240 wesentlich verschiedene Lösungen (eine vollständige Liste und ihrer Beziehungen zueinander findet man in [BCG]). Und es gibt viele andere Aufgabenstellungen für das Spielen mit den Soma-Steinen, siehe zum Beispiel [Ga]. Ein kleines Büchlein mit dem Namen *Soma world* [S] enthält insgesamt 2155 Aufgabenstellungen und ihre Lösungen. Alle diese Aufgaben dienen ganz offensichtlich der Schulung der räumlichen Vorstellung (übrigens ist auch der Rubik-Würfel zur Schulung der dreidimensionalen Anschauung entwickelt worden).

Wenn man mit Kindern einen Satz von Soma-Steinen baut, so empfiehlt sich folgendes Vorgehen: Man stelle 7 Kopien des Dreiersteins her, bei sechsen ist dann noch ein weiterer Einzelwürfel anzukleben. Wichtig ist dabei, die beiden spiegelsymmetrischen Soma-Teile auseinanderzuhalten, alles andere ist problemlos. Man beaufsichtige also diesen einen Schritt: man legt zwei Dreiersteine symmetrisch gegenüber, und klebt auf die gepunkteten Stellen jeweils einen Einzelwürfel:

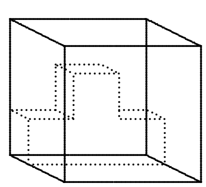


Bei den weiteren Steinen kann man eigentlich keinen Fehler machen, hier die Vorlage; auf die gepunktete Stelle wird wieder ein Einzelwürfel geklebt, entsprechend werden die gestrichelten Würfel angefügt:



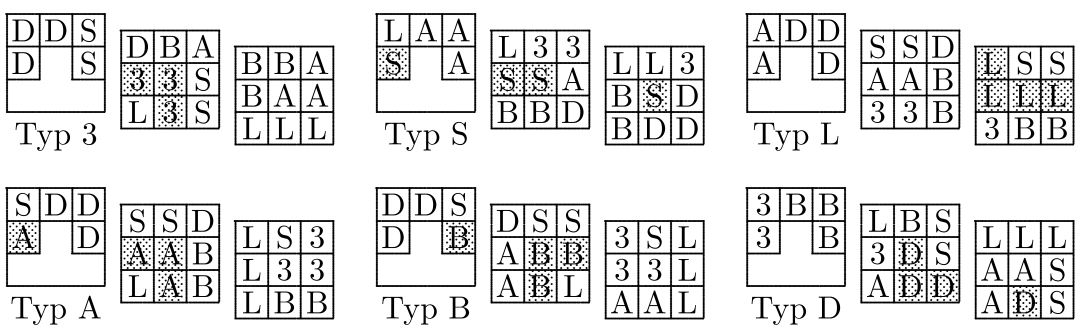
Man nennt diese Soma-Teile das *Dreibein* (daber die Bezeichnung D), das L, das S und das T (denn die letzten drei Teile erinnern an Buchstaben).

Betrachtet man die verschiedenen Lösungen, so stellt man fest, daß die meisten Soma-Teile an ganz verschiedenen Stellen des großen Würfels eingebaut werden, das T allerdings bildet eine Ausnahme: es tritt jeweils an einer Kante auf. Dies erlaubt es auch, festzustellen, ob zwei Lösungen wesentlich verschieden sind oder nicht: durch Drehung kann man immer erreichen, daß das T folgende Lage besitzt:



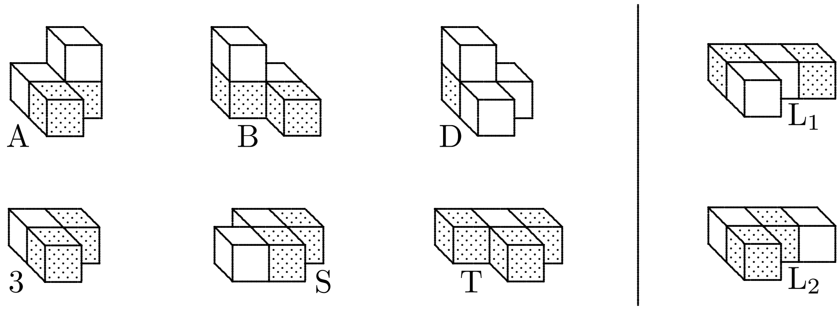
Wie beweist man dies? Jeder Würfel hat 8 Ecken, es gibt also 8 Einzelwürfel, die die Ecken unseres $3 \times 3 \times 3$ Würfels bilden. Wir schauen uns die sieben Soma-Teile an und fragen uns bei jedem, wieviele Eckwürfel es beim Zusammenbau beisteuern kann: man sieht leicht, daß nur das L und das T je zwei Eckwürfel liefern können, alle anderen höchstens einen. Wenn nun das T nicht an einer Kante läge, dann würde es gar keinen Eckwürfel beisteuern. Aber dann können gar nicht alle Ecken besetzt sein, denn das L liefert höchstens zwei Ecken, die restlichen fünf Somateile jeweils höchstens eine Ecke und $2 + 5 \cdot 1 < 8$. Dies zeigt, daß das T an einer Kante liegen muß.

Da das T an einer Kante liegt, steuert es zwei Eckwürfel bei. Was passiert mit den übrigen 6 Ecken? Wegen $5 < 6$ muß das L mindestens eine Ecke bedecken. Es gibt 6 grundsätzlich verschiedene Anordnungen. Erster Fall: Das L steuert nur einen Eckwürfel bei, dann müssen alle anderen Somateile jeweils eine Ecke okkupieren. Oder aber: Das L steuert zwei Eckwürfel bei, dann liegt eines der restlichen fünf Somateile so, daß es keine Ecke berührt. Wir sehen also: *bei jeder Lösung liegt T an einer Kante und eines der übrigen Somateile ist dadurch ausgezeichnet, daß es weniger Eckwürfel als grundsätzlich möglich beisteuert.* Wir können demnach vom Typ einer Lösung sprechen: Typ X soll bedeuten, daß der Somastein X weniger Eckwürfel als grundsätzlich möglich beisteuert. Hier sei für jeden Typ ein Beispiel angegeben, dabei wird jeweils die Belegung der drei Schichten $^{\text{Hinten}}\text{Mitte}_{\text{Vorne}}$ notiert.



Beachte: die hier gezeigten Lösungen vom Typ A und B gehen durch Spiegelung auseinander hervor.

Die mögliche Lage der Somateile kann weiter eingeschränkt werden. Um dies zu sehen, empfiehlt es sich, mit Einzelwürfeln in zwei Farben, sagen wir schwarz und weiß, zu arbeiten, und zwar soll der $3 \times 3 \times 3$ Würfel so gefärbt sein, daß sich die Einzelwürfel in allen Richtungen schachbrettartig abwechseln. Setzen wir zusätzlich voraus, daß die Ecken schwarz gefärbt sind, so verwendet man demnach 14 schwarze Einzelwürfel und 13 weiße. Welche Möglichkeiten gibt es für die Farbenverteilung bei den einzelnen Somateilen, die eine korrekt gefärbte Lösung erlauben? *Es gibt nur zwei mögliche Farbverteilungen!* Zum Beweis überlegt man sich, daß die Somateile A, B, L und S notwendigerweise zwei schwarze und zwei weiße Einzelwürfel besitzen. Wie wir schon wissen, liegt der T-Stein an einer Kante, deshalb enthält er drei schwarze und nur einen weißen Einzelwürfel. Demnach bleiben für die Somateile 3 und D noch 3 schwarze und 4 weiße Einzelwürfel übrig. Beim D-Stein müssen drei Einzelwürfel die gleiche Farbe besitzen. Diese Farbe kann nicht schwarz denn, denn man braucht für den 3-Stein noch mindestens einen schwarzen Einzelwürfel. Also besteht der D-Stein aus drei weißen und einem schwarzen Einzelwürfel. Für den 3-Stein bleiben dann noch ein weißer und zwei schwarze Einzelwürfeln übrig. Insbesonders sehen wir, daß die Färbung nicht nur von T, sondern auch von D und 3 eindeutig bestimmt ist. Was die Somateile A, B und S anbetrifft, so gehen die zwei möglichen Färbungen durch Drehungen auseinander hervor; das einzige Somateil, das zwei wirklich verschiedene Färbungen besitzt, ist also der L-Stein:

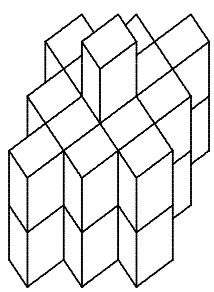


Zu einem vollen Satz zweifarbiger Somateile gehören also die sechs linken Steine und einer der beiden L-Steine. Wählt man den oberen L-Stein L_1, so muß der L-Stein zwei Eckwürfel beisteuern, der L-Stein liegt also an einer Kante.

Wählt man dagegen den unteren L-Stein L_2, so kann dieser nur einen Eckwürfel beisteuern, er überdeckt dann einen Flächenmittelpunkt. In diesem Fall müssen alle Somateile mindestens einen Eckwürfel liefern; insbesondere muß das Dreibein in einer Ecke sitzen. Man sieht recht einfach: *Das Zentrum des Würfels kann nur zu A oder B gehören.* Beweis: Da jeder der Steine einen Eckwürfel beisteuert, ist klar, daß alle flachen Steine (also 3,L,S,T) innerhalb einer der Außenflächen liegen. Und vom Dreibein wissen wir, daß es in einer Ecke sitzt.

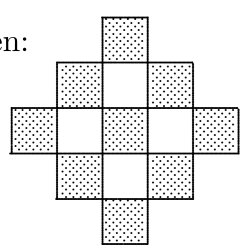
In [BCG] und auch in [T] findet man eine Aufstellung aller möglichen Lagen der einzelnen Somateile innerhalb eines Somawürfels.

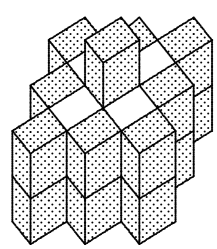
Mit Hilfe einer Färbung haben wir die möglichen Positionen von Somateilen beim Bau eines Somawürfels eingeschränkt. Diese Methode ist auch in anderen Situationen sehr hilfreich. Es sei hier auf Gardner [Ga] verwiesen, wo auf diese Weise gezeigt wird, daß man die folgende Figur mit den Somasteinen **nicht** bauen kann:



Wir verwenden wieder in allen Schichten eine Schachbrettfärbung, nehmen jetzt aber für übereinanderliegende Einzelwürfel die gleiche Farbe:

Blick von oben:



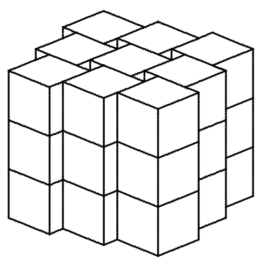


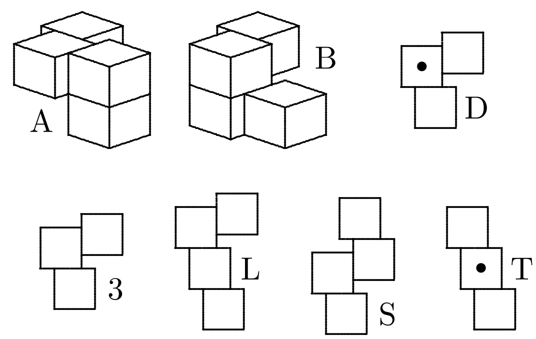
Wie man sieht, sind 19 Einzelwürfel schwarz gefärbt, 8 sind weiß. Betrachtet man nun die verschiedenen Soma-Steine und notiert, wieviele der Einzelwürfel bei einer beliebigen Lage innerhalb dieser Figur höchstens schwarz sein können, so erhält man folgende Liste:

A	B	D	3	L	S	T	Summe
3	3	2	2	3	2	3	18

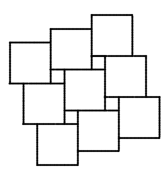
Wir sehen: wie auch immer wir die Somateile in die Figur einpassen, wir können höchstens 18 schwarze Einzelwürfel treffen.

Es gibt viele Abwandlungen des Somawürfels, gescherte Versionen, wie auch solche mit Dekorationen. Jede dieser Änderungen bedeutet, daß man Lösungen sucht, die Zusatzbedingungen erfüllen; die ursprünglich vorhandene große Lösungszahl verringert sich. Hier eine Version, bei der die Einzelwürfel gegeneinander verschoben sind:





Die Grundfläche jeder einzelnen Schicht sieht folgendermaßen aus:



das entsprechende Raster erlaubt keine Spiegelungen! Man sieht daher, daß Soma-Steine, die in dieses Raster passen, nur noch verschoben oder um eine horizontale Drehachse gedreht werden können. Für jeden Einzelwürfel ist also von vornherein fixiert, welche Seite nach oben zeigt!

(1) Wie wir wissen, überdeckt das T eine Kante, diese Kante muß unten liegen.

(2) Würden L und S in einer Ebene liegen, so würden sie dort eine einzige Zelle freilassen und diese läge in einer Ecke. Insbesondere muß es sich bei dieser Ebene um die oberste handeln, wie der in die mittleren Ebene hineinragende Würfel vom T zeigt. Der einzige Einerwürfel, der infrage käme, die Lücke zu füllen, wäre der obere des Dreibeins D, aber wir wissen durch die Färbungsüberlegungen, daß von den Würfeln des Dreibeins nur der mittlere ein Eckwürfel sein kann.

(3) Keiner der beiden Steine L und S liegt in der unteren Ebene: Dort liegen schon drei Würfeln vom T. Läge das S in der unteren Ebene, so würden dort zwei Einzelzellen freibleiben, nur eine aber könnte (durch das A) gefüllt werden. Läge das L in der unteren Ebene, so auch die beiden unteren Würfel vom B, dies liefert

aber in der mittleren Ebene eine Aufteilung in einen Bereich aus 5 Würfeln und einen Einzelwürfel; man sieht leicht, daß diese Bereiche nicht füllbar sind.

(4) Also bleiben für die untere Ebene nur der Stein 3, drei Würfel vom D, zwei Würfel vom B und ein Würfel vom A. Lägen die beiden unteren Würfel vom B in der unteren Ebene, so auch der von A. In der zweiten Ebene hätten wir dann schon einen Würfel vom T, zwei Würfel vom B und drei Würfel vom A, insgesamt also sechs Würfel. Wie wir aber wissen, muss einer der beiden Steine L, S in der mitteleren Ebene liegen, so viel Platz ist aber gar nicht mehr.

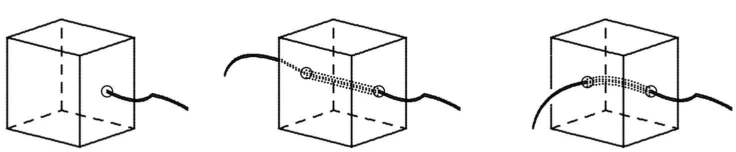
Wir sehen: in der unteren Ebene liegen der Stein 3 und drei Würfel vom D. Nun ist es einfach zu sehen, daß das S in der mittleren Ebene liegt .... Auf diese Weise sieht man, daß es eine einzige Lösung gibt!

Einige weitere Abwandlungen des Soma-Würfels sind zu erwähnen: Beim sogenannten *Baumeisterspiel* wird zusätzlich zu den Soma-Steinen noch der Dreierstab verwandt; insgesamt gibt es also $27 + 3 = 30$ Einzelwürfel, aus denen natürlich kein Würfel, aber viele andere interesante geometrische Figuren, zusammengesetzt werden können. Katsani (siehe [T,TH]) hat vorgeschlagen alle Kombinationen von 4 Einzelwürfeln zu verwenden: es gibt acht derartige Kombinationen, nämlich neben den 6 Soma-Steinen noch die Viererstange, und das 2×2 Brett. Aus diesen 8 Teilen lassen sich zwei $2 \times 2 \times 4$ Quader legen, also auch ein $2 \times 4 \times 4$ Quader und ein $2 \times 2 \times 8$ Quader.

Es gibt viele andere Vorschläge, Einzelwürfel zusammenzukleben, um auf diese Weise Bausteine zu erhalten, die dann zu einem $3 \times 3 \times 3$ Würfel zusammengesetzt werden können, zum Beispiel von Nob und von Coffin [HG]: Beide verwenden Kombinationen von jeweils vier oder fünf Einzelwürfeln und im Gegensatz zum Soma-Würfel gibt es hier jeweils nur eine einzige Lösung! Und natürlich gibt es auch Vorschläge für $4 \times 4 \times 4$ Würfel und für andere Quader. Von großem Interesse sind auch die 12 Pentominos [Go]: hier werden jeweils 5 Einzelwürfel entlang von Würfelseiten zu einer ebenen Figur zusammengeklebt (es gibt bis auf Symmetrie genau 12 Möglichkeiten). Insgesamt werden also $12 \cdot 5 = 60$ Einzelwürfel verwendet und es stellt sich heraus, daß man diese 12 Pentominos zu einem $3 \times 4 \times 5$ Quader zusammenbauen kann.

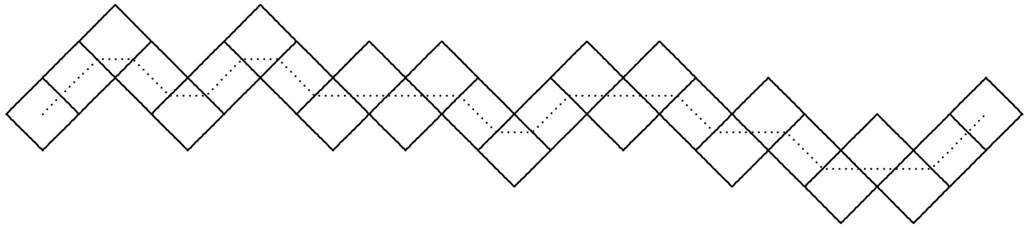
2. Würfelketten.

Wir bleiben beim Problem, aus 27 Einzelwürfeln einen $3 \times 3 \times 3$ Würfel zu bilden, diesmal gehen wir davon aus, daß die Einzelwürfel an einem Gummifaden aufgereiht sind; neben den beiden Endwürfeln gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten: der Gummifaden läuft durch gegenüberliegende oder durch benachbarte Flächen:

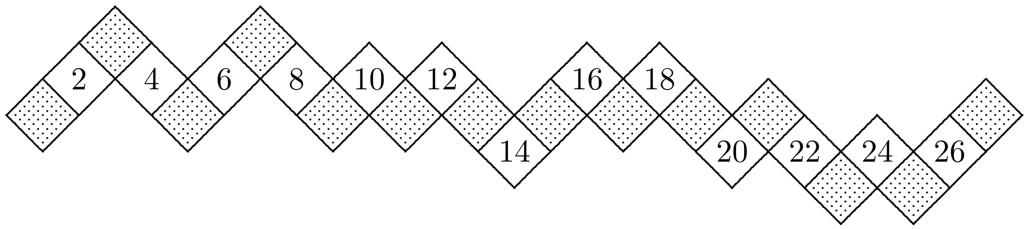


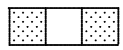
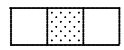
Wir suchen also einen Weg im $3 \times 3 \times 3$ Würfel, der alle Einzelwürfel durchläuft und der jeweils durch die Flächenmittelpunkte geht.

Hier ist eine derartige Kette, flach hingelegt (der Gummifaden ist gestrichelt eingezeichnet):



Wie gesagt, die Aufgabe ist es, die Einzelwürfel so anzuordnen, daß ein $3 \times 3 \times 3$ Würfel entsteht. Es empfiehlt sich, die Würfel von 1 bis 27 durchzunumerieren und sie abwechselnd schwarz und weiß zu färben:



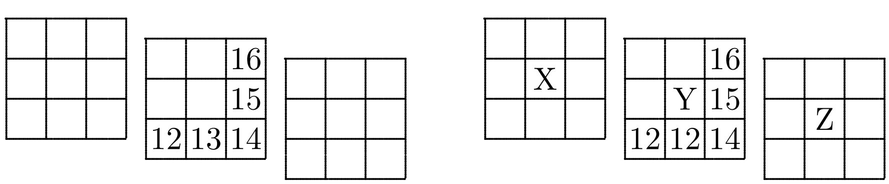
Was auffällt, sind die vielen Dreierstäbe  und . Sie werden es uns ermöglichen, eine Lösung zu finden. Dreierstäbe mit zwei schwarzen Würfeln verlaufen entweder entlang einer Kante (überdecken demnach zwei Ecken) oder aber durch das Zentrum des Würfels. Dreierstäbe mit zwei weißen Würfeln liegen in einer Seitenfläche und verlaufen durch den Flächenmittelpunkt. Wir beginnen mit drei Vorüberlegungen:

(a) Betrachten wir die Würfel 21 – 27, so enthält dieser Teil zwei Dreierstäbe mit je zwei schwarzen Würfeln, sie sind durch das Knie 23,24,25 miteinander verbunden. Offensichtlich können die beiden Würfel 23 und 25 nicht gleichzeitig Eckwürfel sein, also verläuft einer der beiden Dreierstäbe 21,22,23 und 25,26,27 durch den Mittelpunkt des $3 \times 3 \times 3$ Würfels. Also: *einer der beiden Würfel* 22, 26 *ist das Zentrum.*

(b) Der Dreierstab 7,8,9 verläuft entlang einer Kante (denn er verläuft nicht durch das Zentrum), das Knie 9,10,11 zeigt, daß 11 kein Eckwürfel sein kann, also gilt: 11 *ist ein FLächenmittelpunkt.*

(c) Neben 11 sind auch 13, 15, 19 Flächenmittelpunkte (denn sie gehören zu Dreierstäben mit nur einem schwarzen Würfel), auch wissen wir, daß zwei der vier Würfel 21, 23, 25, 27 Flächenmittelpunkte sind. Insgesamt gibt es nur 6 Flächenmittelpunkte. Also folgt: *Der Würfel 17 ist ein Eckwürfel.*

Ausgang für eine Lösung werden die Würfel 12 – 16 sein, wir können annehmen, daß diese zwei Dreierstäbe in der mittleren Ebene liegen, und zwar wie links eingetragen:



Wir wissen, daß einer der beiden Dreierstäbe 21,22,23 und 25,26,27 durch das Zentrum geht, daher folgt, daß die mit X,Y,Z bezeichneten Zellen nur durch derartige

Würfel belegt werden können (denn von den drei möglichen Positionen für einen Dreierstab, der durch das Zentrum geht, sind ja zwei schon ausgeschlossen).

Wie wir wissen, ist der Würfel 17 ein Eckwürfel, also liegt er vor oder hinter dem Würfel 16. Wir können eine der beiden Möglichkeiten wählen, 17 liege also in der vorderen Ebene, rechts oben. Die einzige Möglichkeit, den folgenden Dreierstab 18,19,20 einzupassen, besteht darin, ihn senkrecht in die obere Würfelebene zu legen, denn die Zelle Z ist ja für einen Würfel mit Nummer 21, 23, 25 oder 27 reserviert.

	20	
	X	

	19	16
	Y	15
12	12	14

	18	17
	Z	

Die Würfel 12 – 20 sind also eingepaßt, wie wenden uns dem Würfel 11 zu. Dies ist ein Flächenmittenwürfel, liegt also über dem Würfel 12. Der Würfel 10 kommt nicht als Zentrumswürfel infrage, also liegt er vor oder hinter dem Würfel 11. Wir untersuchen diese beiden Fälle

	20	
10	X	

	19	16
11	Y	15
12	12	14

	18	17
	Z	

Fall 1

	20	
	X	

	19	16
11	Y	15
12	12	14

	18	17
10	Z	

Fall 2

nacheinander. Zuerst betrachten wir den Fall 1: Würfel 10 liegt in der hinteren Ebene. Wir überlegen, wie wir die Folge der Dreierstäbe 9,8, . . . ,1 einpassen können. Wie wir wissen, sind dies Dreierstäbe, die entlang von Kanten liegen. Ausgehend vom Würfel 10 könnten wir versuchen, in der hinteren Ebene zu bleiben, aber dies geht nicht: wir können die Würfel 9,8,7,6,5 einpassen, dann gibt es keinen weiteren Platz. Also bleibt uns nichts anderes übrig, als links oben nach vorne zu laufen und in der vorderen Ebene unser Glück zu versuchen: der Dreierstab 9,8,7 bildet also die linke obere Kante, der Stab 7,6,5 liegt vorne links, 5,4,3 liegt vorne unten, aber beim letzten Stab 3,2,1 gibt es Schwierigkeiten: Die letzte notwendige Zelle ist schon durch den Würfel 17 belegt. Wir sehen also, daß der Fall 1 nicht möglich ist; wir dürfen den Würfel 10 nicht in die hintere Ebene legen.

Also bleibt nur die Möglichkeit, den Würfel 10 vor 11 zu legen, unser Fall 2. Die Überlegungen sind hier ganz ähnlich, liefern aber glücklicherweise keinen Widerspruch! Wir versuchen als erstes, in der vorderen Ebene zu bleiben, aber dies geht nicht: wir können die Würfel 9,8,7,6 einpassen, dann gibt es keinen weiteren Platz. Also müssen wir links oben nach hinten laufen und die Dreierstäbe dort entlang der Kanten verlegen:

7	20	1
6	X	2
5	4	3

8	19	16
11	Y	15
12	13	14

9	18	17
10	Z	

Nun ist es einfach, auch die restlichen Würfel 21 – 27 einzupassen: X = 21, Y = 22, Z = 23, natürlich liegt 24 rechts neben 23 und der letzte Dreierstab 24,25,26 liegt unten in der vorderen Ebene:

7	20	1
6	21	2
5	4	3

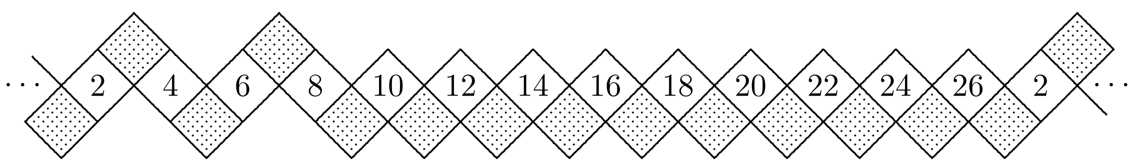
8	19	16
11	22	15
12	13	14

9	18	17
10	23	24
27	26	25

Insgesamt sehen wir, daß es im wesentlichen nur eine Lösung gibt; unsere Wahl 17 nach vorne oder hinten zu legen, führt zu zwei Lösungen die durch Spiegelung an der mittleren Ebene auseinander hervorgehen.

Unsere Würfelkette hatte einen Anfang und ein Ende. Kann es auch eine geschlossene Kette geben? Nein! Dies folgt wieder aus den Färbungsüberlegungen: benachbarte Einzelwürfel entlang der Würfelkette haben verschiedene Farben; da es insgesamt 27 Einzelwürfel gibt, können wir keinen Kreis bilden, bei dem benachbarte Würfel verschiedenfarbig sind. Wir können auch folgendermaßen argumentieren: Bilden wir eine Würfelkette wie oben, so sind die beiden Enden schwarz gefärbt, sind also im $3 \times 3 \times 3$ Wüfel nicht benachbart: jedes Ende ist entweder ein Eckwürfel oder ein Flächenmittelwürfel.

Geschlossene Würfelketten gibt es dann, wenn wir erlauben, daß eine Würfelzelle frei bleibt, hier ist eine derartige Kette (mit 26 Würfeln), in der Abbildung sind Anfang und Ende zu identifizieren:

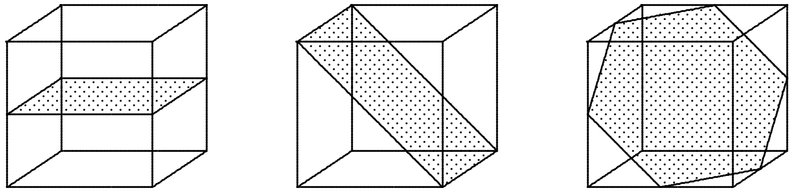


Wir wir wissen, muß eine Zelle freibleiben: es gibt hier Lösungen, bei denen eine Ecke oder eine Flächenmitte freibleibt. Natürlich ist es unmöglich, die Kette so zu legen, daß das Zentrum des Würfels (oder auch eine Kantenmitte) freibleibt. Warum?

3. Das Innenleben eines Würfels

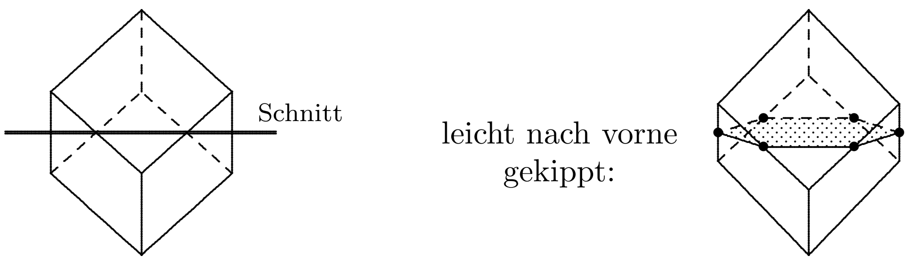
Wie halbiert man einen Würfel? Nehmen wir eine der Symmetrieachsen, und die dazu senkrechte Ebene durch den Mittelpunkt. Dies liefert zwei Hälften, die jeweils die entsprechende Symmetrie besitzen. Welche Symmetrieachsen gibt es? Durch zwei gegenüberliegende Flächenmittelpunkte (eine vierzählige Achse): die Schnittfigur ist ein Quadrat. Durch zwei gegenüberliegende Kantenmittelpunkte (eine zweizählige Achse): die Schnittfigur ist ein Rechteck. Und die Raumdiagonalen; die — in diesem Fall ist es für Ungeübte gar nicht so einfach, die Schnittfigur zu erraten; häufigste Antwort ist: ein Viereck. Dabei sollte klar sein, daß man hier mit einer dreizähligen Achse arbeitet, die Schnittfigur muß demnach unter einer

Drehung um 120° invariant bleiben. Was man erhält ist ein regelmäßiges Sechseck, eine für einige mathematische Fragen ganz wichtige Tatsache.

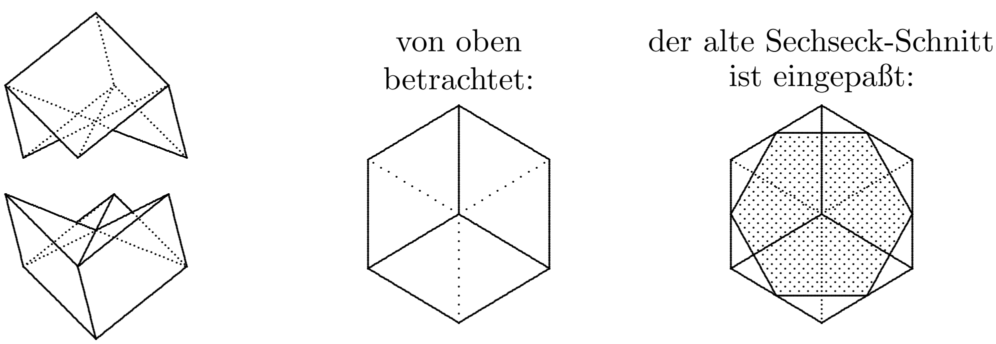


Es gibt drei vierzählige Drehachsen, also auch drei Quadrate, die als Schnittfiguren auftreten; es gibt sechs zweizählige Drehachsen, also auch sechs Rechtecke. Schließlich gibt es vier Raumdiagonalen, also auch vier regelmäßige Sechsecke. Die konvexe Hülle dieser vier Secksecke ist gerade ein Kuboktaeder (oder, in der Sprache der Lie-Theorie, das "Wurzelsystem" A_3).

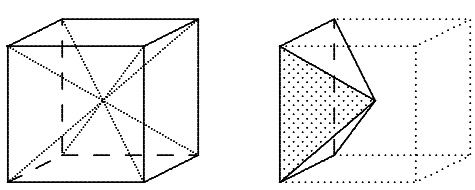
Um sich den Sechseckschnitt besser vorstellen zu können, empfiehlt es sich, den Würfel auf die Spitze zu stellen (also die dreizählige Drehachse in die Vertikale zu bringen):



Es gibt eine weitere Möglichkeit, einen Würfel zu halbieren, und zwar wieder, wie beim Sechseckschnitt, unter Berücksichtigung der dreizähligen Drehsymmetrie, allerdings verzichten wir diesmal darauf, eine ebene Schnittfigur zu erhalten:

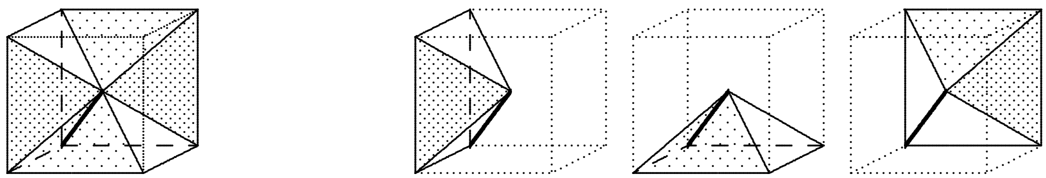


Diese Zerlegung kann am einfachsten mit Hilfe der Zentrumspyramiden des Würfels beschrieben werden. Die vier Raumdiagonalen eines Würfels liefern eine Zerlegung des Würfels in 6 quadratische Pyramiden; rechts ist eine dieser Pyramiden ausgewählt:

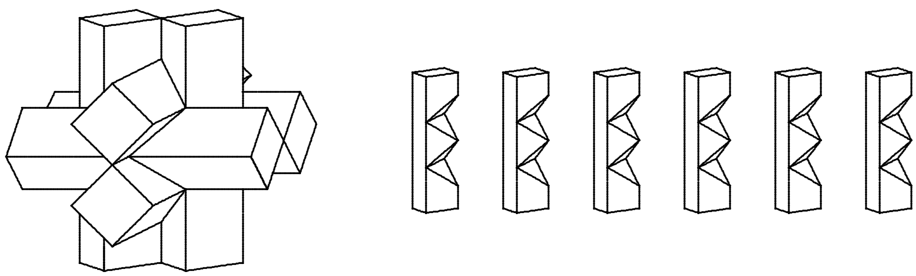


Grundfläche der Pyramide ist eine Würfelfläche, Spitze der Pyramide ist der Würfelmittelpunkt. Diese Zentrumspyramiden entsprechen bijektiv den Würfelflächen.

Wählen wir drei dieser Zentrumspyramiden, so erhalten wir einen halben Würfel. Es gibt (bis auf Drehungen) zwei mögliche Fälle; uns interessiert der Fall daß die drei Zentrumspyramiden paarweise benachbart sind, denn dann gruppieren sie sich um eine Raumdiagonale und werden durch die entsprechende Drehung ineinander überführt*. Die zugehörige (halbe) Raumdiagonale ist hervorgehoben:

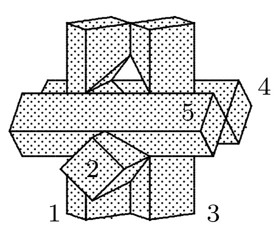


Diese Halbierung des Würfels interessiert uns im Hinblick auf den sogenannten **Diagonal-Knoten,** der aus sechs identisch eingekerbten Holzstäben zusammengebaut wird:



Hier wird, wie bei den Altekruse-Puzzles [R], die Schwierigkeit stabiler Holzkonstruktionen thematisiert. Dreidimensionale Balkenkonstruktionen wären einfach, wenn echte Durchdringungen möglich wären — aber sie sind es nicht, man ist auf Aussparungen und auf versetzte Balkenführungen angewiesen. Bei den Altekruse-Konstruktionen wurde auf dreidimensionale Durchdringungen verzichtet, es waren jeweils nur zwei Balken, die sich kreuzten. Beim Diagonalknoten jedoch treffen Balken in allen drei Koordinatenrichtungen aufeinander.

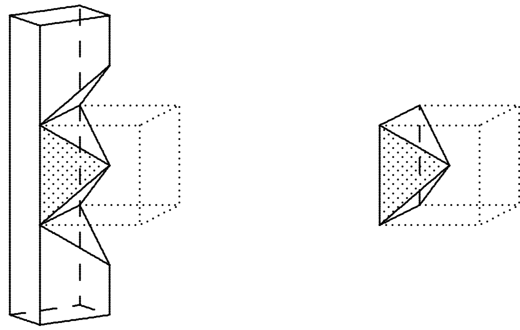
Versucht man ohne Vorüberlegungen, diese sechs Stäbe zusammenzubauen, so scheitert dies immer beim letzten Stab. Es ist ganz einfach, fünf der Stäbe in die gewünschte Lage zu bringen:



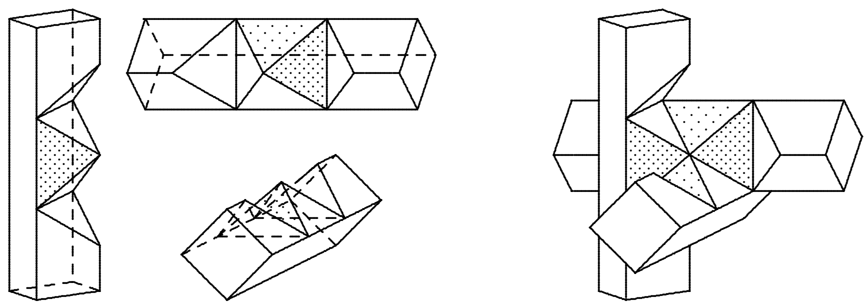
dann aber geht nichts mehr! Ein Auswechseln der Stäbe bringt nichts, denn alle sechs Stäbe haben die gleiche Form. Schauen wir uns die Einkerbungen genau an,

* Im anderen Fall handelt es sich um drei Zentrumspyramiden, von denen zwei einander gegenüber liegen; auf dieser Konfiguration basiert das Acht-Teile-Würfel-Puzzle von Coffin [C].

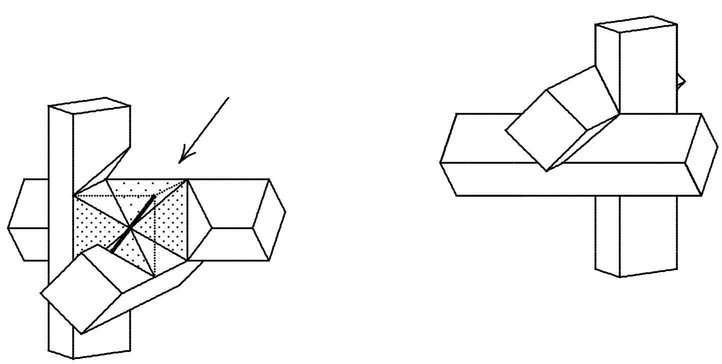
so fällt auf, daß man es in der Mitte mit einer Zentrumspyramide eines Würfels zu tun hat:



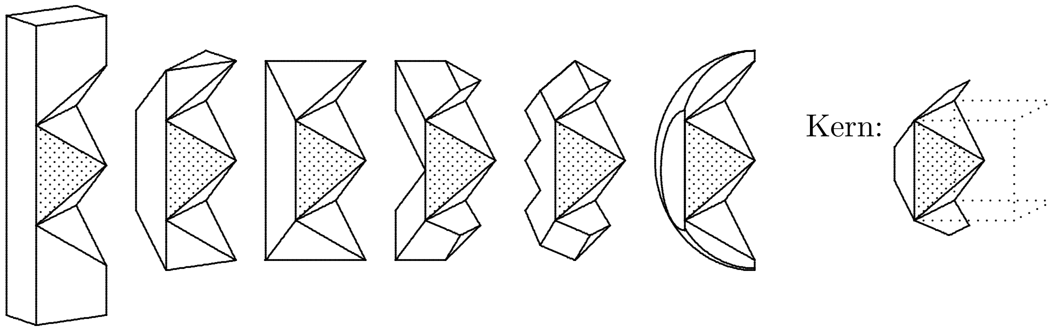
Das Geheimnis beim Zusammenbau besteht nun darin, daß man mit jeweils drei Stäben Hälften baut, wobei sich die drei Zentrumspyramiden zu einem halben Würfel ergänzen, und daß man anschließend diese beiden Hälften ineinanderschiebt. Hier der Zusammenbau eines halben Diagonalknotens: links die Stäbe, rechts das Ergebnis.



Ein zweiter halber Knoten ist entsprechend zu bauen, und zwar spiegelbildlich zum ersten! Beim Bau der beiden Hälften erzeugt man Würfelhälften, und diese werden nun entlang der zugehörigen Würfeldiagonale (Pfeilrichtung) ineinander geschoben:

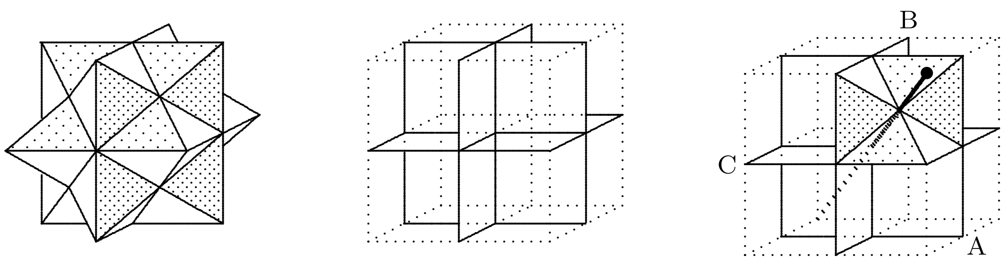


Das wesentliche am Diagonalknoten sind also die Würfelpyramiden, die sich zu einem ganzen Würfel zusammenfügen. Die weitere Form der Einzelstäbe ist unwichtig und kann daher abgewandelt werden. Hier stellen wir einige derartige Abwandlungen vor; ganz rechts betonen wir noch einmal den wesentliche Kern; die beiden Laschen oben und unten sind es, die den Diagonalknoten zusammenhalten:

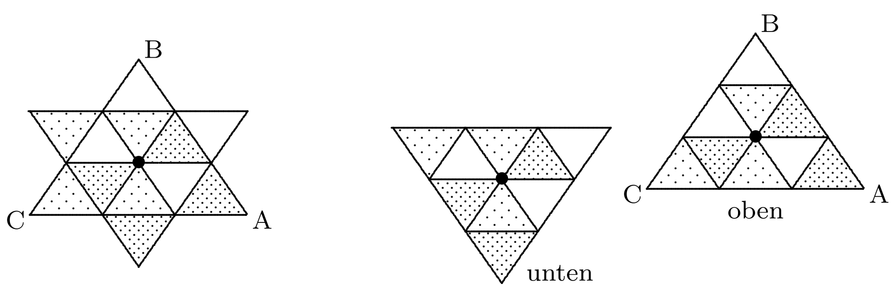


Derartige Abwandlungen liefern natürlich völlig verschiedene äußere Formen, von komplexen Polyedern bis hin zu einer Kugel! Einige davon sind im Handel unter diversen Namen erhältlich; die dritte hier vorgestellte Stabform liefert ein räumliches Gebilde, das manchmal *Kastanie* genannt wird.

Von besonderem Interesse in unserem Zusammenhang ist dabei, daß man diese Kastanie auch durch das Zusammenkleben von acht unserer halben Würfeln entlang von Würfelflächen erhalten kann (in der Mitte sieht man das Gerüst der Klebeflächen, rechts wurde, zur Verdeutlichung, einer dieser halben Würfel wieder eingeklebt; gleichzeitig haben wir auch die zugehörige Drehachse eingetragen):



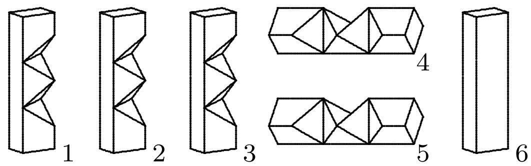
Blicken wir von oben auf diese Drehachse •, so sieht man die Kastanie wie im linken Bild:



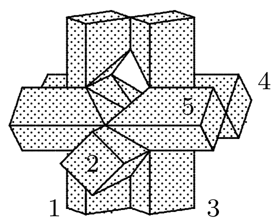
Es fällt auf, daß das regelmaßige Sechseck, als das unsere Würfelhälfte (aus der Richtung der Symmetrieachse betrachtet) erscheint, hier zu einem Davidstern vervollständigt ist. Fassen wir die Ecken A,B,C an, und ziehen sie nach oben, so halbieren wir die Kastanie: wir erhalten zwei Hälften, in Umkehrung des Ineinanderschiebens beim Zusammenbau eines derartigen Diagonalknotens.

Obwohl das Äußere der verschiedenen Diagonalknoten auf keine Verwandtschaft hindeutet, ist die innere Struktur jeweils identisch: jeder Stein besteht aus einer Mittelpunkts-Pyramide eines Würfels, alle sechs Steine zusammen liefern als Kern des Puzzles einen vollständigen Würfel (und zusammengesetzt werden jeweils 3 derartige Zentrums-Pyramiden, dies liefert einen halben Würfel).

Wir haben hier Puzzles vor Augen, die äußerlich völlig verschieden aussehen, aber nach ein und demselben Prinzip konstruiert sind. Andererseits finden man gerade hier auch Beispiele von Puzzles, deren Äußeres identisch ist, während die innere Struktur (und gerade darauf kommt es uns an) verschieden ist: man kann nämlich auch mit Stäben der folgenden Form beginnen:



Wie unsere bisher verwendeten Stäbe sind die ersten drei Stäbe zweimal eingekerbt. Die beiden waagrechten Stäbe besitzen neben diesen beiden Einkerbungen eine weitere, und zwar in der Mitte und um 90° versetzt. Der letzte Stab besitzt keine Einkerbung, man nennt ihn den *Schlüssel,* beim Zusammenbau wird er als letzter eingefügt. Hier gibt es keinerlei Probleme: man beginnt mit den Stäben 1,2,3, fügt 4 und 5 hinzu und erhält dann gerade die Öffnung, die man braucht, um als letztes den Schlüssel einzufügen:



Literatur

[BCG] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele. Band 4. Solitairspiele. Vieweg. Braunschweig

[C] Stewart T. Coffin: The puzzling world of polyhedral dissections. Oxford University Press. Oxford 1990.

[DB] Pieter van Delft, Jack Botermans: Denkspiele der Welt. Heimeran Verlag. München 1977.

[Ga] Martin Gardner: Mathematische Rätsel und Probleme. Vieweg, Braunschweig 1968.

[Go] Solomon W. Golomb: Polyominoes. Puzzles, Patterns, Problems, and Packings. Princeton University Press. ^{2}1994.

[HG] Kevin Holmes, Rik van Grol: A Handbook of Cube-Assembly Puzzles using Polycube Shapes. London 1996.

[R] Claus Michael Ringel. Denkspiele der Welt (1). Sedima 1997/98.

[S] Soma World. The complete soma cube. Canberra Publishing & Printing Company.

[T] Rüdiger Thiele: Das große Spielvergnügen. Hugendubel. München 1984.

[TH] Rüdiger Thiele, Konrad Haase: Teufelsspiele. Urania. Leipzig 1988.

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, POBox 100 131, D-33 501 Bielefeld

E-mail address: `ringel@mathematik.uni-bielefeld.de`

`http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/∼ringel/`