Krumme Sachen – warum musste Einstein Mathematik neu lernen?

Prof. Dr. habil. Ilka Agricola
Philipps-Universität Marburg

Hochschultage Physik
Februar 2018

Klassische Schulgeometrie. . .

. . . wurde von „Euklid & co“ im 3. Jahrhundert vor Christus in Alexandria gegründet, spielt sich vor allem in der Ebene ab und behandelt Themen wie:

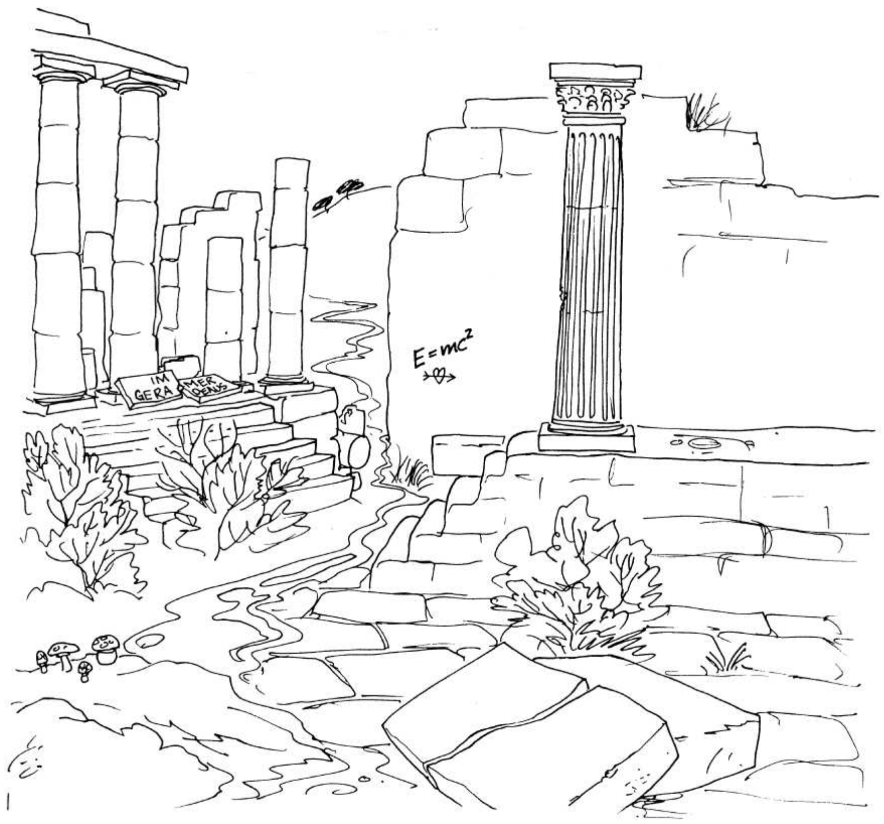
> Geraden, Dreiecke und Kreise; Winkelsumme im Dreieck; Sätze von Pythagoras und Thales, Strahlensätze. . .

[Dieser und alle weiteren Cartoons dieses Vortrages:

Jean-Perre Petit, „Das Geometrikon“/ „Das Zwillingsuniversum“]

. . . reicht nicht zur Formulierung der Relativitätstheorie

Die Kontroverse ums Parallelenaxiom sowie die bahnbrechenden Ergebnisse von Gauß und Riemann führten im 19. Jahrhundert zu einer Neuformulierung und Neuausrichtung der gesamten Geometrie!



Die Relativitätstheorie ist bereits in ihrer Formulierung an eine mathematischen sprache gekoppelt – an die moderne Differentialgeometrie.

Eine Vorlesung ‘ART’ setzt ein (mindestens) zweijähriges Mathematik-Studium voraus.

Die Mathematiker in Einsteins Leben

Lehrer

(während seines Studiums an der ETH Zürich, 1896-1900)

Carl F. Geiser (1843-1934)

Hermann Minkowski (1864-1909)

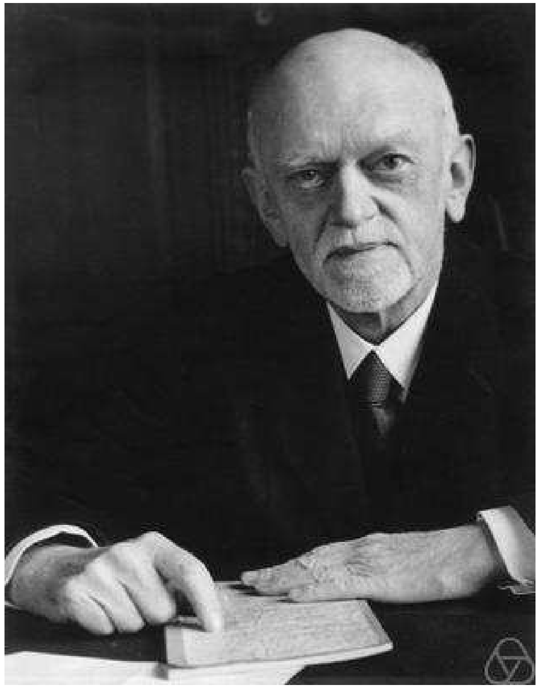
„Ach, der Einstein? Der schwänzte doch immer die Vorlesungen – dem hätte ich das gar nicht zugetraut.“

Hermann Minkowski zu Max Born über Albert Einstein, um 1907

Kollegen

Marcel Grossmann
(1878-1936)

Konkurrenten



David Hilbert
(1862-1943)

„Grossmann, Du mußt mir helfen, sonst werd ich verrückt!“

A. Einstein zu seinem Freund und ehemaligen Kommilitonen M. Grossmann, Sommer 1912

Mathematisierung, Teil I: Die SRT (1905)

A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann.Phys. 17 (1905), 891–921.

Einstein postuliert folgende Grundprinzipien (S.895):

„1. Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.“

„2. Jeder Lichtstrahl bewegt sich im „ruhenden“ [d.h. in dem die Newton'schen Gleichungen gelten, I.A.] Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit c, unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert wird.“

Daraus leitet Einstein die Transformationsformeln vom ruhenden (K) zum bewegten (K') Koordinatensystem (Geschw. v in x-Richtung) her:

$$x' = \beta(x - vt),\ y' = y, z' = z, t' = \beta\big[t - \frac{vx}{c^2}\big] \text{ mit } \beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Er schreibt weiter:

„Zur Zeit $t = t' = 0$ werde von dem zu dieser Zeit gemeinsamen Koordinatenursprung beider Systeme aus eine Kugelwelle ausgesandt, welche sich im System K mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Ist (x, y, z) ein von dieser Welle ergriffener Punkt, so ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

Diese Gleichung transformieren wir mit Hilfe unserer Transformationsgleichungen und erhalten nach einfacher Rechnung:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2.$$

Die betrachtete Welle ist also auch im bewegten System betrachtet eine Kugelwelle von der Ausbreitungsgeschwindigkeit c. Hiermit ist gezeigt, dass unsere beiden Grundprinzipien miteinander vereinbar sind."

Die Neufassung von Hermann Minkowski

H. Minkowski, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, Gött. Nachr. 1908, 53-111.

Idee: Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ stellen wir um zu

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

und interpretieren sie als Quadrat der Länge (Norm) eines Vektors bzgl. des Skalarprodukts („Minkowski-Metrik“)

$$\langle a_1, a_2 \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2, \quad a_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ ct_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Die Zeit ist dann die vierte Koordinate, ein Lichtstrahl ein Vektor der Länge Null (unabhängig vom Koordinatensystem).

Max Planck im Frühjahr 1909 hierzu:

> „. . . diese neue Auffassung des Zeitbegriffs stellt an die Abstraktionsfähigkeit des Physikers die allerhöchsten Anforderungen; sie übertrifft an Kühnheit wohl alles, was bisher in der spekulativen Naturforschung. . . geleistet wurde; die nichteuklidische Geometrie ist Kinderspiel dagegen.“

Einstein war von Minkowskis neuen Ideen zunächst nicht begeistert, vier Jahre später pries er jedoch Minkowskis „wichtige Gedanken, ohne die die allgemeine Relativitätstheorie vielleicht in den Windeln stecken geblieben wäre.“

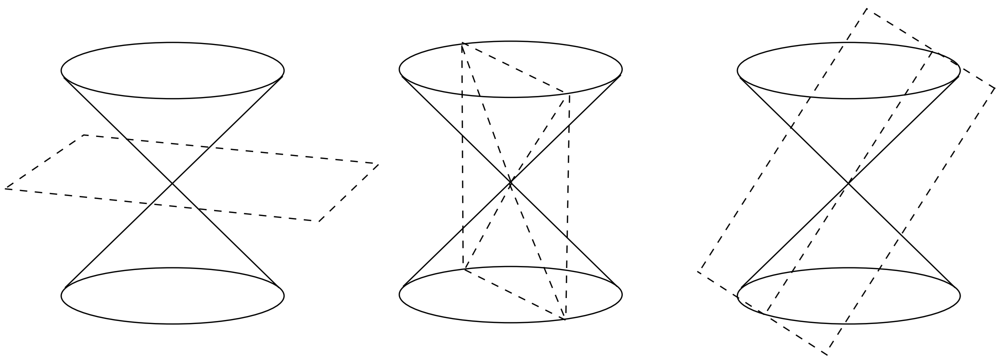
Die Neufassung durch Minkowski ist mehr als reine mathematische Spielerei – sie bringt wirklich neue mathematische *und* physikalische Aspekte in die Theorie!

Die Raum-Zeit $(\mathbb{R}^4, \langle -,- \rangle)$ von Minkowski

Der *Lichtkegel* $\mathcal{L} = \{a \in \mathbb{R}^4 : \|a\| = 0\}$ trennt die Raum-Zeit in zwei Bereiche, die miteinander nicht kommunizieren können („Zukunfts- und Vergangenheitskegel“):

Geometrisch passieren erstaunliche Dinge!

Seien a_1, a_2 zwei zeitartige Vektoren ($\|a_i\| < 0$):



- Es gilt die inverse Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle a_1, a_2 \rangle| \geq \|a_1\| \cdot \|a_2\|$
- Es ex. ein eindeutiges $\varphi \geq 0$, genannt der *hyperbolische Winkel* zwischen a_1 und a_2, mit $\langle a_1, a_2 \rangle = -\|a_1\| \cdot \|a_2\| \cosh \varphi$
- Es gilt die inverse Dreiecksungleichung: $\|a_1\| + \|a_2\| \leq \|a_1 + a_2\|$.

Die inverse Dreiecksungleichung macht klar, dass der Betrag $\| - \|$ nichts mit Abstandsmessung zu tun hat!

Mathematatisierung, Teil II: Die ART (1912-15)

Heuristik:

Universalität der Gravitation

Die Bewegung eines Probekörpers in einem Gravitationsfeld ist, bei gegebenen Anfangsbedingungen, unabhängig von seiner Masse und Komposition.

Äquivalenzprinzip

Keine lokalen Experimente können ein in einem Gravitationsfeld frei fallendes, nichtrotierendes System („lokales Inertialsystem“) von einem gleichförmig bewegten System im gravitationsfreien Raum unterscheiden. Salopp gesagt: Die Gravitation kann lokal wegtransformiert werden (Raumflüge!).

... Diese Heuristik gilt es nun, *mathematisch zu formalisieren*. Wir gehen dabei *nicht* den historischen Weg, da er einige verwirrende Umwege beinhaltete.

„Ich beschäftige mich nun ausschließlich mit dem Gravitationsproblem und glaube nun mit Hilfe eines hiesigen befreundeten Mathematikers [M. Grossmann] aller Schwierigkeiten Herr zu werden. Aber das eine ist sicher, dass ich mich im Leben noch nicht annähernd so geplagt habe, und dass ich grosse Hochachtung für die Mathematik eingeflösst bekommen habe, die ich bis jetzt in ihren subtileren Teilen in meiner Einfalt für puren Luxus ansah!"

Albert Einstein in einem Brief an Arnold Sommerfeld, 29. Oktober 1912

Wir beginnen mit ein paar Grundideen der nichteuklidischen Geometrie!

Am Anfang war Euklid: Das Problem des Parallelenaxioms

In Euklid's *Elementen* wird die Geometrie axiomatisch beschrieben.

Dfn. Geraden heißen *parallel*, falls sie sich nicht schneiden.

Satz. Zu jeder Geraden G und jedem nicht auf ihr liegenden Punkt A gibt es <u>mindestens</u> eine zu G parallele Gerade durch A.

Euklid setzte in seinem Werk voraus, dass es nur eine solche Parallele gibt.

Problem: Kann man allein aus den Axiomen beweisen, dass diese parallele Gerade eindeutig ist? [Parallelenaxiom]

Zahlreiche Versuche eines Beweises scheiterten bis in die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts hinein – mussten scheitern, denn die Eindeutigkeit einer Parallelen ist im Rahmen der axiomatischen Geometrie *nicht beweisbar:*

Es gibt auch geometrische Ebenen, bei der durch einen Punkt unendlich viele Parallelen zu einer vorgegebenen Geraden verlaufen!

[C. F. Gauß, N. I. Lobatschkewski (1793-1856), J. Bolyai (1802-1860)]

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Gauß erkannte, dass eine Neukonzeption der Grundlagen der Geometrie nötig war, u. a. suchte er Antworten auf die Fragen

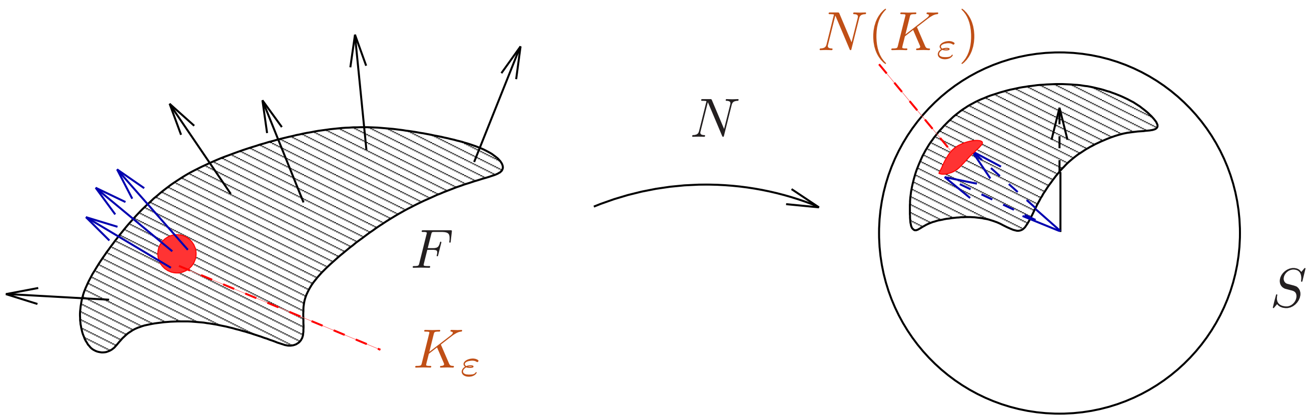
- Was ist eine „Gerade“? eine Kurve ohne Krümmung, eine kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten?
- Was heißt „parallel“? keine Schnittpunkte, gleicher Abstand, oder eine gemeinsame Senkrechte?
- Was ist Krümmung? Wovon hängt sie ab?

Zudem erkannte er, dass einige bereits existierende isolierte Ergebnisse anderer Mathematiker mit diesen Fragen zusammenhängen.

Was ist Krümmung?

- F: eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, $x \in F$ ein Punkt darauf
- S: Sphäre vom Radius $r = 1$
- „Normalenabbildung“ $N: \; F \to S, \; x \mapsto N(x)$:

Betrachte in x den Normalenvektor der Länge eins als einen Punkt auf S



Wähle um x eine kleine Scheibe K_ε vom Radius ε

Dfn. Gauß'sche Krümmung von F im Punkt x: $G(x) \; := \; \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{Fl}(N(K_\varepsilon))}{\mathrm{Fl}(K_\varepsilon)}$

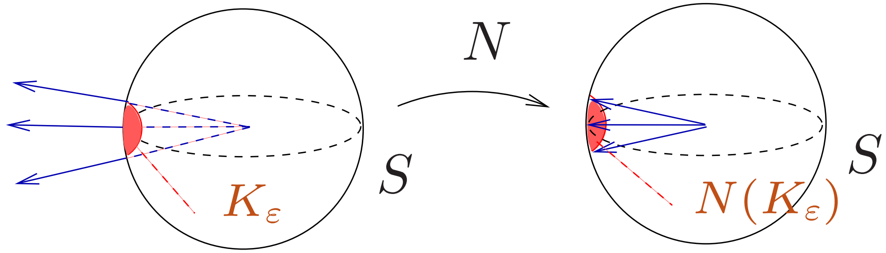
[Gauß, 1827]

Was ist Krümmung – Beispiele

Sphäre:

N bildet jeden Punkt auf sich selbst ab, also ist $\mathrm{Fl}(K_\varepsilon) = \mathrm{Fl}(N(K_\varepsilon))$

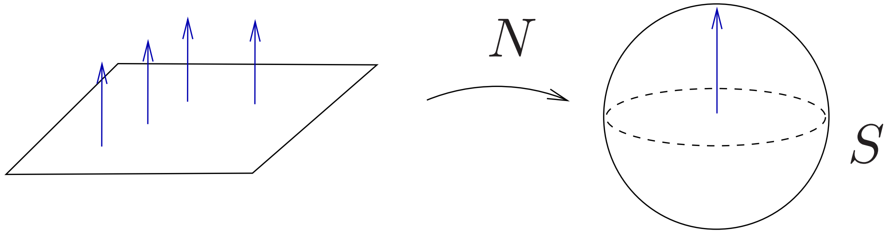
$$G(x) = 1$$



Ebene:

Alle Punkte haben den gleichen Normalenvektor, das Bild von N besteht aus einem Punkt, der keinen Flächeninhalt hat:

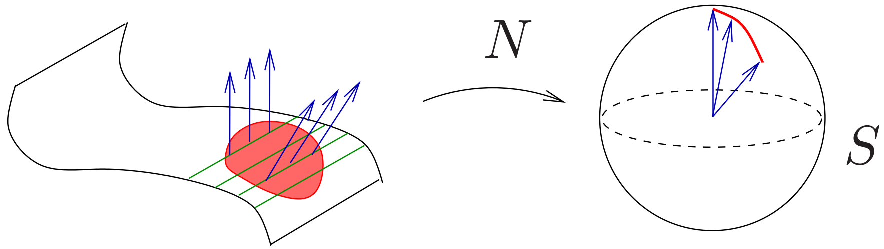
$$G(x) = 0$$



„Blatt“:

Alle Punkte auf einer Geraden haben den gleichen Normalenvektor, das Bild von N ist eine Kurve ohne Flächeninhalt:

$$G(x) = 0$$



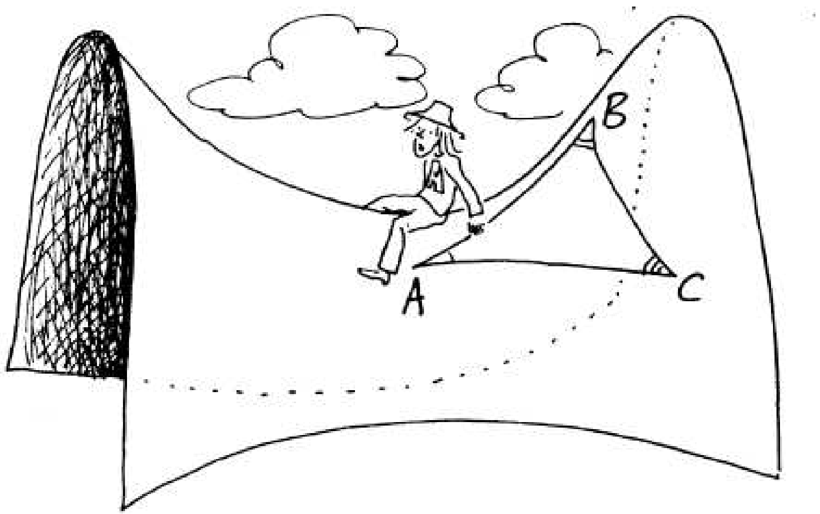
Was ist Krümmung – erste Ergebnisse

Wie für das „Blatt“ gilt allgemein:

Satz (Theorema Egregium, Gauß, 1827). Die Gauß'sche Krümmung G einer Fläche ist eine Größe der *inneren Geometrie*, d. h. sie hängt nicht von der Lage der Fläche im Raum ab.

Allgemeiner kann man der Krümmung noch ein Vorzeichen geben:

Auf sog. *Sattelflächen* ist z. B. die Gauß'sche Krümmung $G < 0$.



Gauß'sche Krümmung – Anwendungen

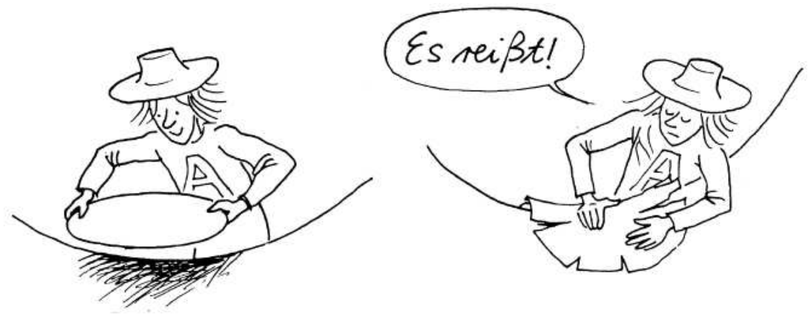
Vom Geschenke einpacken sind positive und negative Krümmung wohlvertraut:

Satz.

- $G > 0 \Leftrightarrow$ Fläche hat weniger Flächeninhalt als eine Ebene
- $G = 0 \Leftrightarrow$ Fläche hat genauso viel Flächeninhalt wie eine Ebene
- $G < 0 \Leftrightarrow$ Fläche hat mehr viel Flächeninhalt als eine Ebene

$G > 0$

$G = 0$



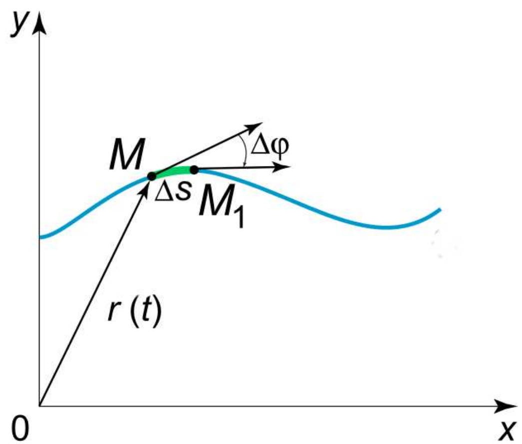
$G < 0$

Welche (mathematischen) Begriffe gehen in die Krümmung ein?

Kurve: Sei $r(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve; $r'(t)$ ist ihr *Tangentialvektor*. Wir setzen voraus: $\|r'(t)\| = 1 \; \forall t \in \mathbb{R}$

Physikalisch: Bewegungskurve (Trajektorie) eines punktförmigen Testteilchens, das immer Einheitsgeschwindigkeit hat.

Dfn. Die Krümmung $\kappa(t)$ im Punkt $M = r(t)$ auf der Kurve ist die infinitesimale Winkeländerung des Tangentialvektors pro Längeneinheit der Kurve:



$$\kappa(t) = \lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \stackrel{!}{=} \|r''(t)\|$$

Wir benötigen also:

- Winkel $\simeq$ Skalarprodukte, Tangentialvektor $\rightsquigarrow$ Tangentialraum
- zweite Ableitungen und Bogenlänge
- . . . und das alles unabhängig vom umgebenden Raum („innere Geometrie“) und der Wahl der Koordinaten (Äquivalenzprinzip)

Immer geradeaus: Geodäten

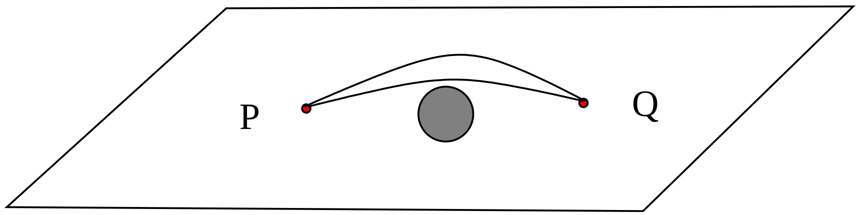
Diese sind besondere *Kurven auf Flächen*:

Dfn. Geodäte: Kurve zwischen zwei Punkten, deren Länge ein *Extremum* annimmt.

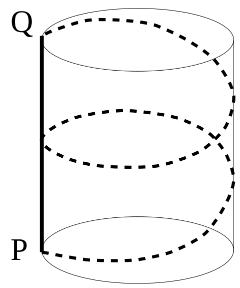
– Eine Geodäte hat immer kleinstmögliche Krümmung, d. h. eine „kürzeste“ Verbindung ist auch immer eine „geradeste“!

– Geodäten hängen nur von der Gauß'schen Krümmung ab!

Achtung:



• Eine Geodäte muss nicht zwischen beliebigen Punkten existieren!

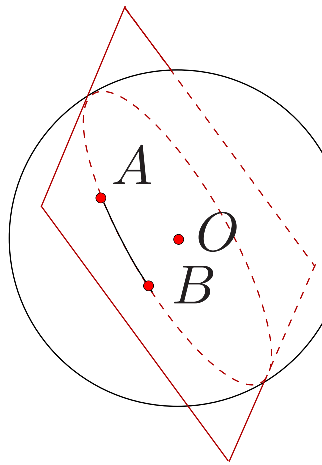


• Eine Geodäte muss nicht minimale Länge haben, und es kann mehr als 2 Geodäten zwischen 2 Punkten geben!

Geodäten auf der Sphäre: Großkreise

Dfn. Den Schnitt der Sphäre mit einer Ebene durch den Mittelpunkt O nennt man *Großkreis*.

Satz (Geodäten auf der Sphäre). Jede Geodäte auf der Sphäre ist Teil eines Großkreises.



Die Sphäre ist eine besonders einfache gekrümmte Fläche, viele Eigenschaften von Flächen kann man aber gut an ihr veranschaulichen (wähle Radius 1):

Der sphärische Satz von Pythagoras

Fortan: Betrachte Dreiecke auf der Sphäre S, deren Kanten *Großkreisbögen* sind!

Satz. Für ein rechtwinkliges Dreieck auf S mit Kanten a, b und c gilt

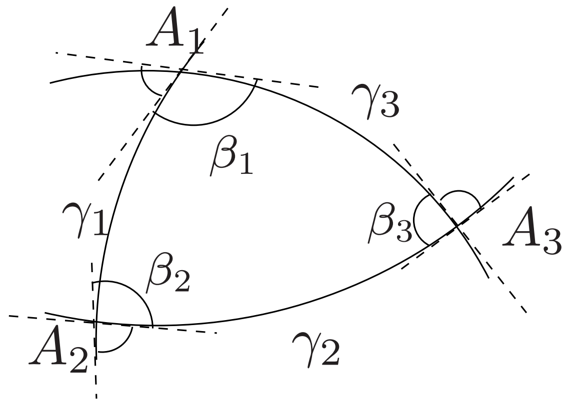
$$\cos c \;=\; \cos a \cos b.$$

Entwickeln wir die Funktion $\cos r$ in ihre Potenzreihe $\cos r = 1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \ldots$, so erhalten wir

$$1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24} + \ldots \;=\; 1 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \ldots.$$

In erster Näherung geht also der sphärische Pythagoras in den euklidischen Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ über.

Die sphärische Winkelsumme im Dreieck



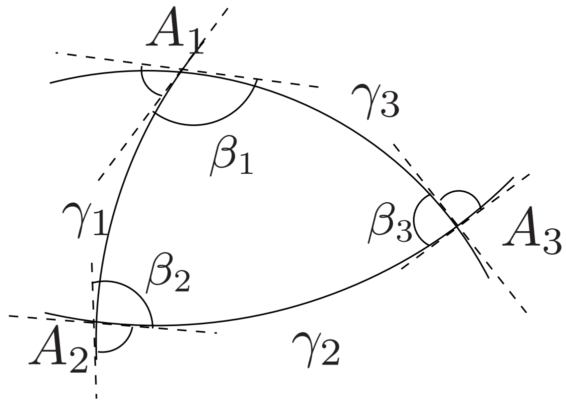
Satz (Harriot, 1603). Winkelsumme im geodätischen Dreieck Δ auf der Sphäre S mit Innenwinkeln β_i:

$$\text{Fläche}(\Delta) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^o$$

(d. h. Winkelsumme liegt zw. 180^o und 900^o)

Warum taucht hier die Fläche des Dreiecks auf, obwohl sie in der Ebene keine Rolle spielt?

Die sphärische Winkelsumme im Dreieck



Satz (Harriot, 1603). Winkelsumme im geodätischen Dreieck Δ auf der Sphäre S mit Innenwinkeln β_i:

$$\text{Fläche}(\Delta) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^o$$

(d. h. Winkelsumme liegt zw. 180^o und 900^o)

Warum taucht hier die Fläche des Dreiecks auf, obwohl sie in der Ebene keine Rolle spielt?

Gauß: Fläche ist eigentlich das Integral über die Gauß'sche Krümmung! ($G = 0$ in der Ebene, $G = 1$ auf der Sphäre)

$\longrightarrow$ das 'Theorema Elegantissimum' (1827) verallgemeinert dies für Flächen beliebiger Krümmung.

Ist etwa $G < 0$, dann ist die Winkelsumme im Dreieck $< 180^o$

Wie weiter? Bernhard Riemann (1826-1866)

Habilitationsvortrag 1854 „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“

Er erkannte, wie man das Flächenkonzept auf beliebige Dimensionen verallgemeinern kann:

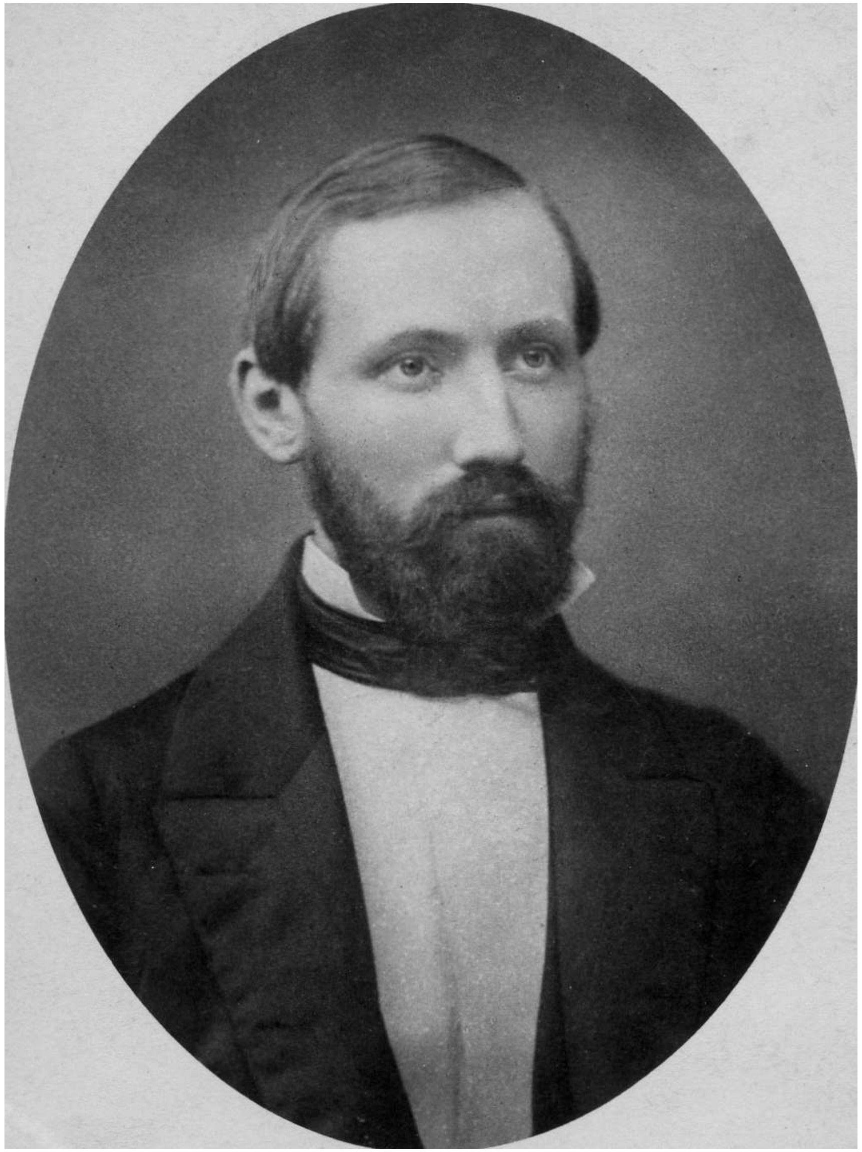
- lokal muss ein Tangentialraum immer gleicher Dimension existieren

- in jedem Tangentialraum existiert ein Skalarprodukt („Metrik“)

... alles andere (Krümmung, Geodäten, Winkel usw.) folgt daraus.

$\longrightarrow$

„Riemann’sche Mannigfaltigkeit“



Rückblick in die Analysis-Vorlesung. . .

Richtungsableitung:

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Richtungsableitung in x_0 in Richtung $U \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$(\vec{\nabla}_U f)(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tU) - f(x_0)}{t} [= Df(x_0)(U)]$$

Für Vektor V wird $\vec{\nabla}_U V$ komponentenweise definiert

Wichtige Eigenschaften:

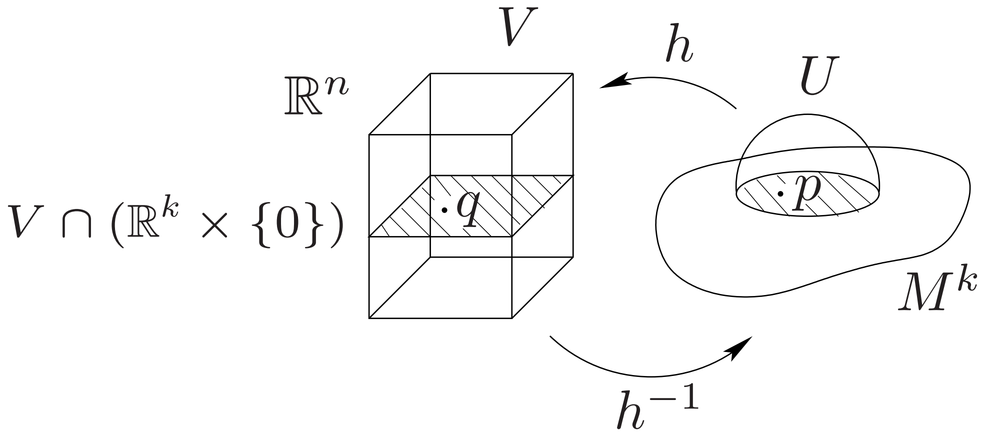
- RR für Multiplikation mit Funktionen, Linearität. . .
- $\vec{\nabla}_V \vec{\nabla}_W = \vec{\nabla}_W \vec{\nabla}_V$ für $V = \frac{\partial}{\partial x}$, $W = \frac{\partial}{\partial y}$ (f *immer* glatt)
- Verträglich mit Skalarprodukt: Für die skalare Funktion $f := \langle X, Y \rangle$ gilt

$$V(f) = \langle V, \mathrm{grad} f \rangle = \langle \vec{\nabla}_V X, Y \rangle + \langle X, \vec{\nabla}_V Y \rangle$$

(Unter-)mannigfaltigkeit:

$M^k \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dim. *Untermannigfaltigkeit*, falls $\forall p \in M^k$ offene Mengen $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ sowie ein Diffeomorphismus $h : U \to V$ derart existieren, dass $h(U \cap M^k)$ gleich dem Teilraum $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ ist:

$$h(U \cap M^k) \;=\; V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \;=\; \{q \in V :\; q^{k+1} = \ldots = q^n = 0\,\}\,.$$



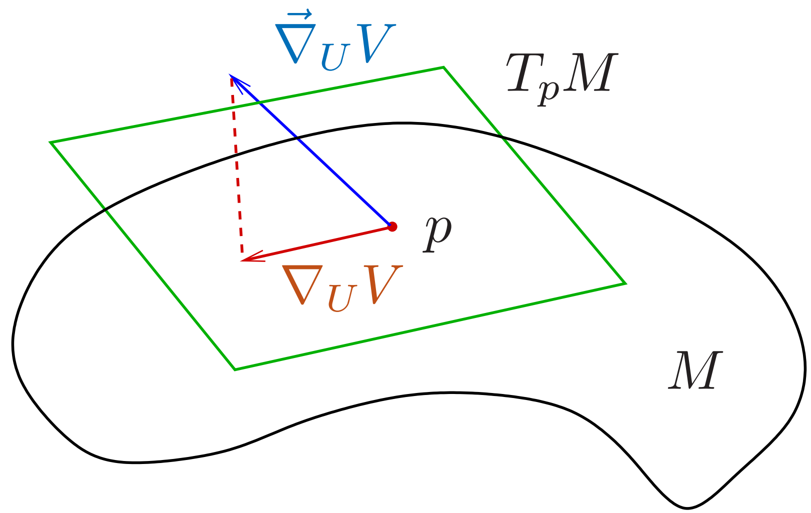
Intuitiv: Eine k-dim. Mfgkt M^k sieht in der Umgebung jedes Punktes p wie eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ aus und hat dort einen Tangentialraum $T_pM \simeq \mathbb{R}^k$.

'Abstrakte' Mannigfaltigkeit kommen ohne die Einbettung in den umgebenden $\mathbb{R}^n$ aus – das macht es technischer, die Heuristik ist aber die gleiche.

Zusammenhänge

Zusammenhang [Zshg] ∇: Ableitungsvorschrift im Tangentialraum einer Mfkt, die formal alle Eig. der Richtungsabl. hat

Andere Bezeichnung: „kovariante Ableitung“



Bspl. Für Fläche in $\mathbb{R}^3$:
Projektion $\nabla_U V$ der Richtungsableitung $\vec{\nabla}_U V$ auf Tangentialebene = „Levi-Civita-Zshg“ ∇

Man rechnet für die Gauß'sche Krümmung von Flächen nach:

$$G(p) = \langle \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{[e_1,e_2]} e_2, e_1 \rangle$$

für *jede ONB* e_1, e_2 der Tangentialebene $T_p M$.

Das ist eine koordinatenunabhängige Art, die Gauß'sche Krümmung als eine 2. Ableitung darzustellen!

Krümmungsgrößen

Metrik $\langle -, - \rangle \ \rightsquigarrow \ \nabla$, genauer:

Satz. Jede Riemann'sche Mannigfaltigkeit $(M, \langle -, - \rangle)$ hat einen eindeutigen *Levi-Civita-Zusammenhang* ∇.

- Krümmungstransformation: $\mathcal{R}(X,Y)Z \ := \ \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$
- Ricci-Krümmung: $\mathrm{Ric}(Y,Z) := \mathrm{tr}(X \mapsto \mathcal{R}(X,Y)Z)$ [symmetrische Matrix]
- Skalarkrümmung: $\mathrm{Scal} := \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}$ [skalare Funktion auf M]

Für eine Fläche ist $\mathrm{Ric} = G \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ für jede ONB der Tangentialebene; in höheren Dimensionen ist die Krümmung leider keine skalare Funktion mehr.

Heuristik der ART – mathematische Formulierung

Das Äquivalenzprinzip („ART meets SRT“)

Das mathematische Modell für die Raum-Zeit in Anwesenheit von Gravitationsfeldern ist:

- eine 4-dim. Riemannsche Mannigfaltigkeit M, deren Tangentialraum $T_pM \; \forall p \in M$ isomorph ist zum Minkowski-Raum mit der Minkowski-Metrik
- Die Metrik wird interpretiert als Gravitationsfeld

Mfgktn haben i. a. keine ausgezeichneten Koordinatensysteme, deswegen macht es keinen Sinn, etwa die Lorentz-Invarianz von Gleichungen zu fordern. Vielmehr müssen physikalische Gesetze *kovariant* formulierbar, d. h. unabhängig von der Wahl eines spezifischen Koordinatensystems sein.

Satz. Jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine Umgebung, in der sich ein sog. *geodätisches Normalkoordinatensystem* $x_1, \ldots, x_4$ einführen lässt, welches

$$g_p = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla_{\partial_i} \partial_j = 0, \partial_i := \partial / \partial x_i$$

erfüllt.

• Ein solches System interpretieren wir als *lokales Intertialsystem*. Durch die Wahl des mathematischen Modells ist das Äquivalenzprinzip also kein Postulat, sondern ein mathematischer Satz!

In manchen Rechnungen können geodätische Normalkoordinaten eminent nützlich sein. Zudem impliziert die Forderung, dass die ART die SRT im Limes enthalten soll, dass physikalische Gesetze sich in geodätischen Normalkoordinaten auf ihre SRT-Form reduzieren müssen.

- Lichtstrahlen und Probekörper bewegen sich entlang (lichtartigen bzw. raumartigen) geodätischen Kurven

- die Krümmung ist ein Maß für die Stärke des Gravitationsfeldes

- Die Einstein'sche Feldgleichung verallgemeinert das Newton'sche Gravitationsgesetz und ist ggf. in Anwesenheit weiterer physikalischer Felder (z. B. eines elektromagnetischen Teilchens) um weitere Feldgleichungen zu ergänzen. Im Vakuum mit kosmologischer Konstante Λ lautet sie:

$$\boxed{\mathrm{Ric}(X,Y) = \left[\tfrac{\mathrm{Scal}}{2} + \Lambda\right] \cdot \langle X, Y \rangle}$$

Fakt: Wenn die Gl. gilt, muss Scal eine konstante Funktion auf M sein.

Bildet man die Spur der Einstein-Gleichung, so folgt

$$\mathrm{Scal}(1 - \dim M/2) + \Lambda \dim M = 0.$$

Es ergeben sich zwei Fälle:

• Ist $\Lambda = 0$ (und $\dim M \neq 2$), so ist M genau dann eine Lösung der Einstein-Gleichung im Vakuum, wenn $\mathrm{Ric} = 0$ ist;

• Ist $\Lambda \neq 0$, dann ist (M, g) genau dann eine Lösung der Einstein-Gleichung im Vakuum, wenn (M, g) ein (mathematischer) Einstein-Raum ist: $\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{const} \cdot \langle X, Y \rangle$.

Die Forderung $\mathrm{Ric} = 0$ ist mathematisch sehr streng – es gilt etwa:

Satz (Hawking / Ellis). Jede kompakte Vakuum-Lösung der Einstein-Gleichung mit $\Lambda = 0$ besitzt geschlossene zeitartige Kurven.

Geschlossene zeitartige Kurven gelten aber als unphysikalisch (Zeitreisen!), deswegen interessieren uns nur nicht kompakte Lösungen der Einstein-Gleichung.

Die Kooperation Einstein-Grossmann

Bis 1912 waren Einsteins Versuche zur Gravitationstheorie ad-hoc-Ansätze, die alle scheiterten.

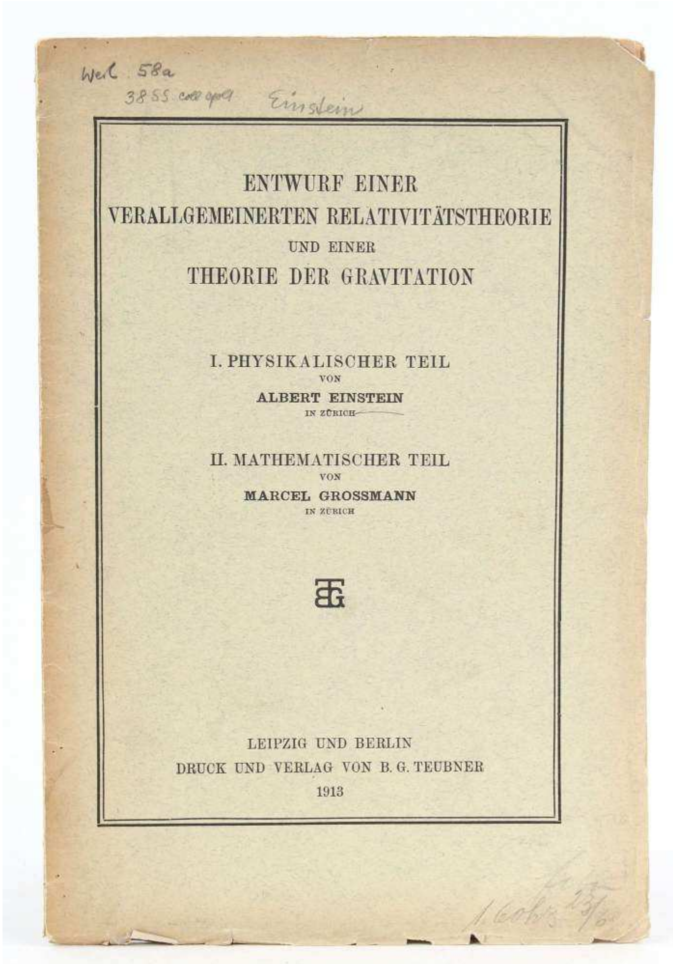
> „Das Problem der Gravitation war damit reduziert auf ein rein mathematisches. Gibt es Differentialgleichungen für die g_{ik}, welche invariant sind gegenüber nicht-linearen Koordinaten-Transformationen? Solche Differentialgleichungen und nur solche kamen als Feldgleichungen des Gravitationsfeldes in Betracht. Das Bewegungsgesetz materieller Punkte war dann durch die Gleichung der geodätischen Linie gegeben. Mit dieser Aufgabe im Kopf suchte ich 1912 meinen alten Studienfreund Marcel Großmann auf, der unterdessen Professor der Mathematik am eidgenössischen Polytechnikum geworden war. Er fing sofort Feuer, obwohl er der Physik gegenüber als echter Mathematiker eine etwas skeptische Einstellung hatte.“

A.Einstein in „Erinnerungen-Souvenirs“, 1955

Die Kooperation Einstein-Grossmann

Die gemeinsame Arbeit von 1913 enthält alle wesentlichen Konzepte – aber noch nicht die richtige Feldgleichung

Die moderne Differentialgeometrie war keine fertige Theorie, sondern noch im Entstehen – z. B. hat Grossmann den Ricci-Tensor neu entdeckt. . .



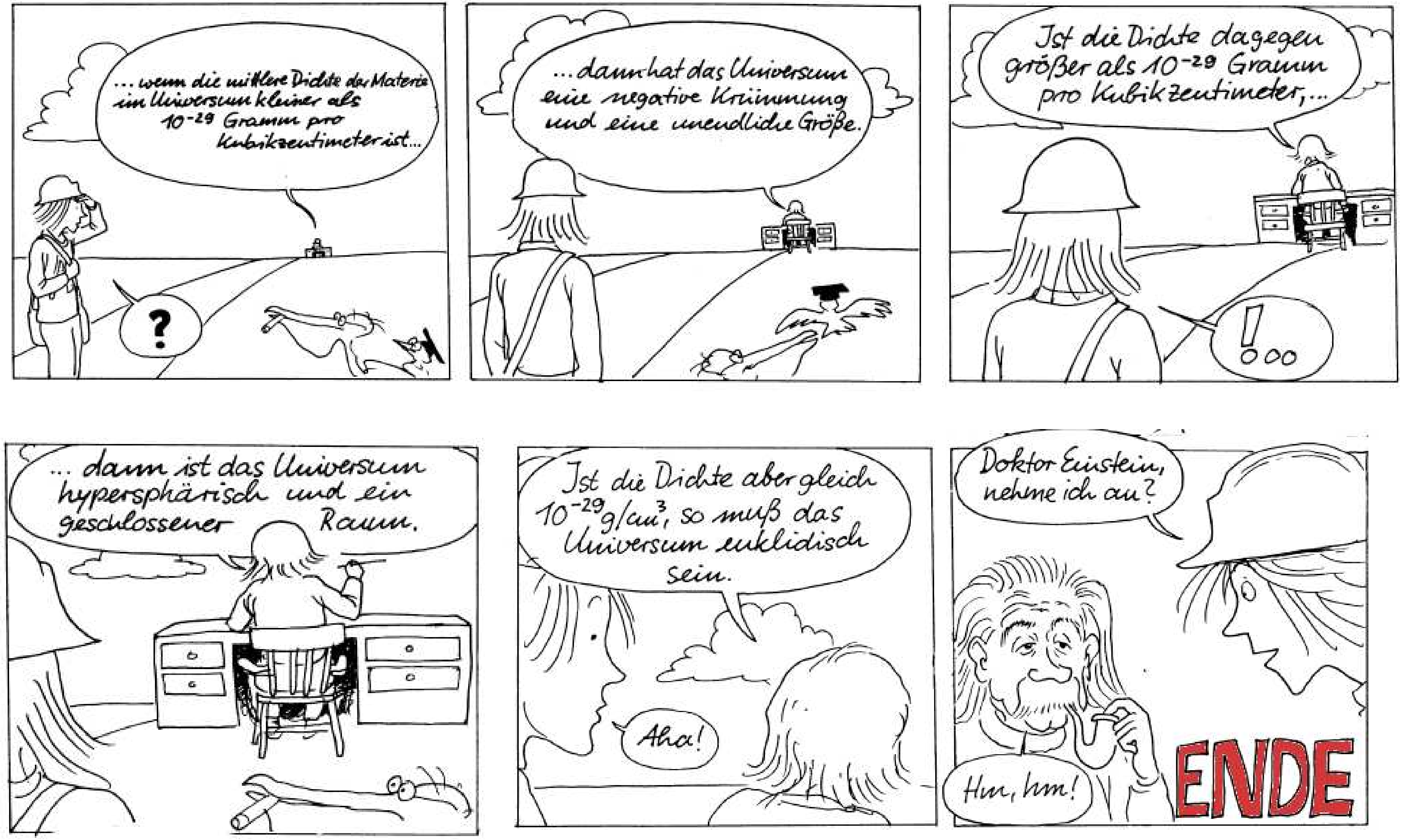
Riemann’sche Geometrie

Über 50 Jahre lang galt die Riemann’sche Geometrie als exotisch und mathematische Spielerei – erst die ART brachte ihr den fachlichen Durchbruch.

1850, Mikhail Valisevich Ostragradsky zu Bernhard Riemann

Seitdem sind Differentialgeometrie und theoretische Physik eng miteinander verbunden.

Weiterentwicklungen: Eichfeldtheorie, Superstringtheorie; Mannigfaltigkeiten mit G-Strukturen. . .


... wenn die mittlere Dichte der Materie im Universum kleiner als 10^{-29} Gramm pro Kubikzentimeter ist...
?
... dann hat das Universum eine negative Krümmung und eine unendliche Größe.
Ist die Dichte dagegen größer als 10^{-29} Gramm pro Kubikzentimeter, ...
!...
... dann ist das Universum hypersphärisch und ein geschlossener Raum.
Ist die Dichte aber gleich 10^{-29} g/cm^3, so muß das Universum euklidisch sein.
Aha!
Doktor Einstein, nehme ich an?
Hm, hm!
ENDE

Literatur

Ilka Agricola & Thomas Friedrich, *Vektoranalysis – Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik*, Springer Vieweg, 2010.

Albert Einstein, *Erinnerungen-Souvenirs*, Schweizerische Hochschulzeitung 28 (1955), 145–153.

Karin Reich, *Die Entwicklung des Tensorkalküls – Vom absoluten Differentialkalkül zur Relativitätstheorie*, Birkhäuser Verlag, 1994.

Tilman Sauer, *Marcel Grossmann and his contribution to the general theory of relativity*, Invited plenary article for the Proceedings of the 13th Marcel Grossmann meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Graviation, and Relativistic Field Theory, arXiv:1312.4068