Dirac-Operatoren und Geometrie

Prof. Dr. habil. Ilka Agricola

Antrittsvorlesung an der Philipps-Universität Marburg

1. Juli 2009

gewidmet
meinem Mathematik-Lehrer

André Tissot

merci pour tout!

Lycée Jean Renoir/München,
Juni 1991

Überblick:

- Entwicklung der Dirac-Operatoren von einer „ad-hoc“ Konstruktion der Quantenmechanik zu einem *universellen* Objekt der Mathematik

- wesentliche wissenschaftliche Ergebnisse, die in diesem Entwicklungsprozess erzielt wurden

- besondere Rolle der Objekte, auf denen Dirac-Operatoren wirken: „Spinoren“ ?!?

. . .

Was sind Spinoren? Der Stern-Gerlach-Versuch (1922)

Strahl von Silberatomen ($\equiv$ Elektronen) durchläuft ein inhomogenes Magnetfeld und schlägt sich auf einem Schirm nieder.

Klassisch:
kontinuierliche Verteilung

Quantenmechanik:
- bei „normalem“ Drehimpuls: 3 Flecken

- tatsächlich:
2 Flecken ?!?

Experimenteller Befund:

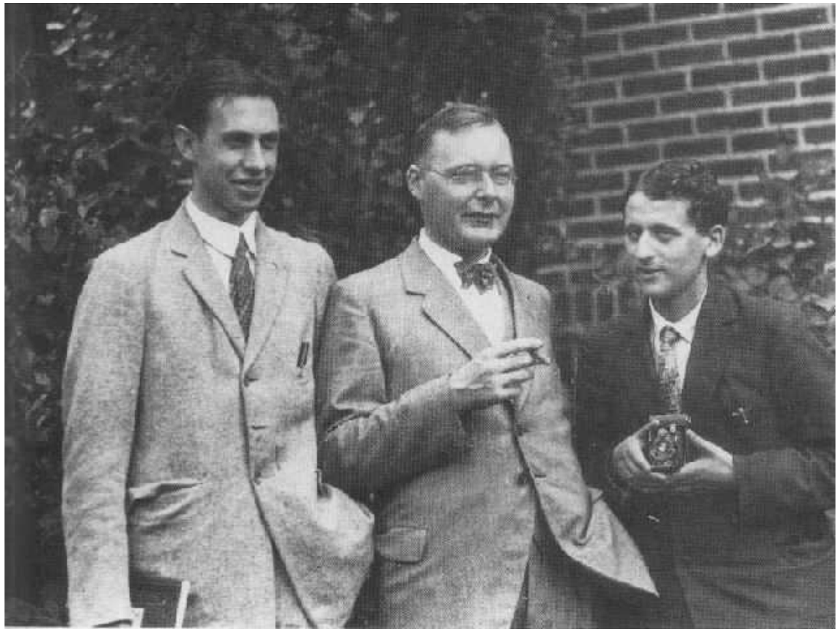
• Elektronen haben einen inneren Drehimpuls („Spin“), der drei Freiheitsgrade wie in unserem Anschauungsraum hat. . .

• . . . aber in einem zwei-dimensionalem Raum wirkt ($2 =$ Anzahl Flecken auf dem Schirm)

1924: Pauli postuliert einen neuen „2-wertigen“ Freiheitsgrad für das Elektron ($\rightarrow$ Ausschlussprinzip)

1925: Uhlenbeck, Kramers und Goudsmit interpretieren diesen Freiheitsgrad als inneren Drehimpuls (Spin)

1927: richtige Interpretation des Stern-gerlach-Versuchs



George Uhlenbeck, Hendrik Kramers und Samuel Goudsmit (1928)

Spinoren: mathematische Beschreibung

Die Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ ist *nicht einfach zusammenhängend*: erst eine Drehung um $2 \times 360 = 720$ Grad führt wieder in die Ausgangslage zurück [Demonstration]

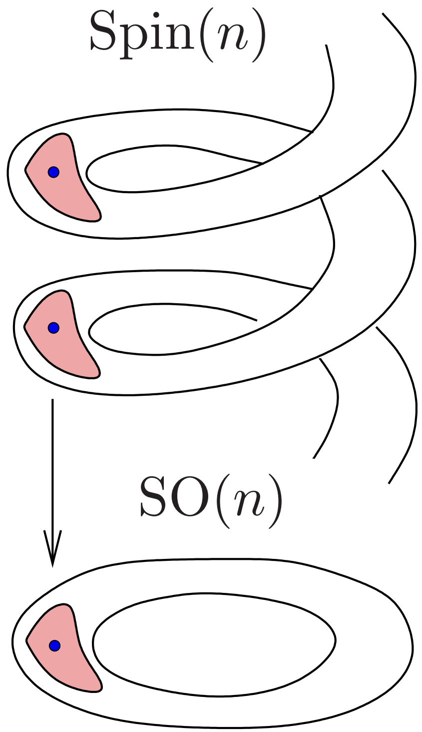
Über jeder Drehgruppe $\mathrm{SO}(n)$ liegt eine andere Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$:

- jedes Element in $\mathrm{SO}(n)$ hat 2 Urbilder in $\mathrm{Spin}(n)$

Dadurch kann $\mathrm{Spin}(n)$ in (komplexen) Dimensionen dargestellt zu werden, die für die „gewöhnliche“ Drehgruppe $\mathrm{SO}(n)$ unerreichbar sind

→ Raum Δ_n der Spinoren

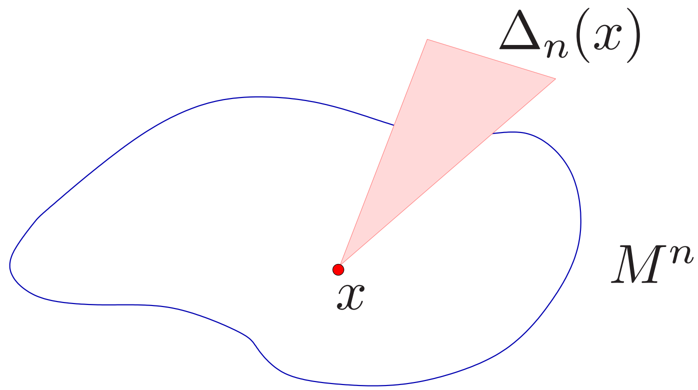
- Für $n = 3$ wurden diese komplexen Drehungen bereits von Leonhard Euler (1770) und Olinde Rodrigues (1840) entdeckt!



2-fache Überlagerung von $\mathrm{SO}(n)$

Globales Bild

Sei (M^n, g) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit
[= gekrümmter Raum mit Abstandsbegriff]



Idee:

Klebe Δ_n in jedem Punkt x an die Mfkt:

$$\Sigma(M^n) = \bigcup_{x \in M^n} \Delta_n(x)$$ „Spinorbündel"

Bemerkungen:

- Das Spinorbündel existiert nur unter gewissen topologischen Voraussetzungen an M ($\omega_2(M) = 0$) und ist ggf. nicht eindeutig

- mathematische Beschreibung am bequemsten mit Hilfe von Clifford-Algebren (William Clifford, 1845-1879)

→ Haben damit „spinorwertige" Funktionen = Spinorfelder

Dirac, Schrödinger und die Dirac-Gleichung I

Betrachte freies klassisches Teilchen im flachen Minkowski-Raum mit

m: Masse, p: Impuls, E : Energie, c: Lichtgeschwindigkeit

- Spezielle Relativitätstheorie: $E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$
- Quantisierungsregeln der Quantenmechanik:

$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$, $p \rightarrow -i\hbar\nabla\psi$, ψ ein Spinorfeld

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \;=\; \sqrt{c^2\hbar^2\Delta\psi + m^2c^4\psi}}$$

P. Dirac (1933)

wobei: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$: Laplace-Operator

[Paul Dirac, 1928]

Pb: Welche Bedeutung hat die Quadratwurzel von Δ?

Dirac, Schrödinger und die Dirac-Gleichung II

Dirac's Idee wird hier sehr treffend beschrieben: [Schrödinger, 1932]

§ 2. Aufbau der Metrik aus Matrizenfeldern.

Wir nennen die Weltvariablen

$$x_0 = ict\,, \quad x_1 = x\,, \quad x_2 = y\,, \quad x_3 = z\,.$$

Die erste ist stets reinimaginär, die anderen drei reell. Diracs Grundgedanke war, den euklidischen Wellenoperator

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

als das Quadrat eines linearen Operators aufzufassen

$$\left(\mathring{\gamma}_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \mathring{\gamma}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathring{\gamma}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathring{\gamma}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2,$$

wobei die $\mathring{\gamma}_k$ 4×4reihige Matrizen[1] sind, die der Forderung genügen müssen

$$\mathring{\gamma}_i \mathring{\gamma}_k + \mathring{\gamma}_k \mathring{\gamma}_i = 2\delta_{ik}\,, \qquad (1)$$

d. h. gleich der Nullmatrix oder gleich dem doppelten der Einheitsmatrix, je nachdem $i \neq k$ oder $i = k$. Man weiß, daß die $\mathring{\gamma}_k$ durch die Forderung (1) gerade

Konsequenzen:
- Spin ist relativistischer Effekt
- Vorhersage des Positrons (=Antiteilchen des Elektrons)

„Die Dirac-Gleichung auf semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeiten“ – oder

Diracsches Elektron im Schwerefeld I.

Von E. Schrödinger.

(Vorgelegt am 25. Februar 1932 [s. oben S. 46].)

§ 1. Einleitung.

Die Vereinigung der Diracschen Theorie des Elektrons mit der allgemeinen Relativitätstheorie ist schon wiederholt in Angriff genommen worden, so von Wigner[1], Tetrode[2], Fock[3], Weyl[4], Zaycoff[5], Podolsky[6]. Die meisten

In dieser Arbeit gibt Schrödinger zum ersten Mal

- eine moderne Beschreibung von Spinorfeldern in gekrümmten Räumen
- eine koordinatenunabhängige Definition des Dirac-Operators
- Eine Formel, die das Problem der Quadratwurzel löst (siehe später)

Der Dirac-Operator

(M^n, g): kompakte Riemann'sche Spin-Mannigfaltigkeit, ohne Rand

$\psi, \varphi \ldots \in \Gamma(\Sigma)$ Spinorfelder, $e_1, \ldots e_n$ Orthonormalbasis

∇^g: Levi-Civita-Zusammenhang (direkte Verallg. der Richtungsableitung)

Dfn: $$\boxed{D^g : \Gamma(\Sigma) \longrightarrow \Gamma(\Sigma), \quad D^g\psi := \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla^g_{e_i}\psi}$$

Eigenschaften:

- D^g ist elliptischer Operator erster Ordnung, wesentlich selbst-adjungiert auf $L^2(\Sigma)$, hat reines Punktspektrum

- Von ähnlich fundamentaler Bedeutung wie der Laplace-Operator

... Schrödinger's Arbeiten zum Dirac-Operator sind leider danach in Vergessenheit geraten. Also haben die Mathematiker alles neu entdeckt!

1950-1970: Der Dirac-Operator und die Topologie der Mannigfaltigkeiten

Philosophie:

Folgende Objekte auf einer Mannigfaltigkeit sollten in Verbindung stehen:

topologische Invarianten ⟷ Index eines Operators

Integral über geometrische Größe

1950-1970: Der Dirac-Operator und die Topologie der Mannigfaltigkeiten II

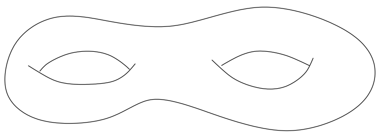
Bspl: Der Satz von **Gauß-Bonnet** für unberandete Flächen M^2 (Gauß 1827, Bonnet 1848)

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{M^2} G\, dM^2 \;=\; \chi(M^2)}$$

wobei:

G: *Gauß'sche Krümmung* der Fläche

$\chi(M^2)$: *Euler-Charakteristik* $= 2 - 2g$, wobei g die Anzahl „Löcher“ ist.

Brezelfläche:  $g = 2$, also $\chi = -2$

Jede Variante dieser Fläche muss hinreichend viel negative Krümmung haben, damit insgesamt $\frac{1}{2\pi}\int G = -2$ ist!

1950-1970: Der Dirac-Operator und die Topologie der Mannigfaltigkeiten II

Bspl: Der Satz von **Gauß-Bonnet** für unberandete Flächen M^2 (Gauß 1827, Bonnet 1848)

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{M^2} G\,dM^2 \;=\; \chi(M^2)}$$

Integral über

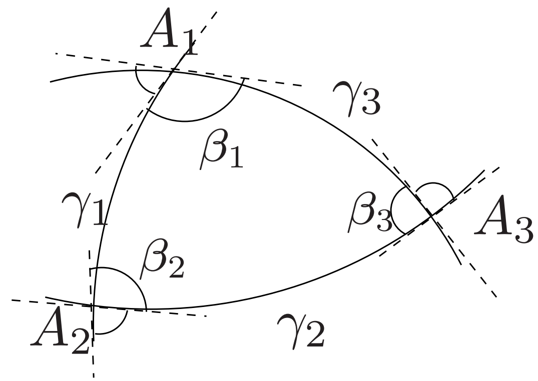
geometrische Größe

topologische Invariante

Folgerung: Winkelsumme im geodätischen Dreieck Δ auf der Sphäre S^2 mit Innenwinkeln β_i:

$$\int_\Delta 1\cdot dS^2 = \mathrm{Fl}(\Delta) = \beta_1+\beta_2+\beta_3-\pi$$

[Harriot, 1603]



Aber: Ein Operator und sein Index kommt hier nicht vor?!?

1950-1970: Der Dirac-Operator und die Topologie der Mannigfaltigkeiten III

Bspl: Der Satz von **Chern-Gauß-Bonnet** auf einer kompakten Mfkt M^n

Betrachte Differentialoperator $D = d + d^* : \ \Lambda^{\text{gerade}}(M) \to \Lambda^{\text{ungerade}}(M)$

Raum der *harmonischen Formen*:

$$\mathcal{H}^k(M) := \{\omega \in \Lambda^k(M) \mid d\omega = 0, d^*\omega = 0\}$$

Dann ist $\quad \ker D = \bigoplus_k \mathcal{H}^{2k}(M), \quad \operatorname{coker} D = \bigoplus_k \mathcal{H}^{2k+1}(M)$

und

$$\operatorname{index}(D) =: \dim \ker D - \dim \operatorname{coker} D = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M) = \chi(M)$$

und es gilt tatsächlich $\quad \boxed{\operatorname{index}(D) = \chi(M) = \int_M \operatorname{Pf}(R)\, dM}$

rechte Seite: hängt nur von der Krümmung ab

1950-1970: Der Dirac-Operator und die Topologie der Mannigfaltigkeiten IV

- 4-dim. Spin-Mfkt M^4, kompakt, ohne Rand, mit fundamentaler Homologie-Klasse $\mu_M \in H_4(M^4, \mathbb{Z})$.

Das sog. *cup-Produkt* definiert eine symmetrische Bilinearform

$$\beta: \; H^2(M^4; \mathbb{R}) \times H^2(M^4; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta(\alpha, \beta) := \langle \alpha \cup \beta, \mu_M \rangle$$

Wie jede BLF hat β eine Signatur $(m, n) = (+, +, \ldots, -)$:

$$\sigma(M^4) := m - n$$

Sie ist invariant unter topologischen Kobordismen. [René Thom, 1954]

Satz (Rochlin, 1952). $\sigma(M^4) = 0 \bmod 16.$

Satz (Hirzebruch, 1954). $\displaystyle \frac{1}{8}\sigma(M^4) = \frac{1}{24}\int_{M^4} p_1 \, dM^4.$

1950-1970: Der Dirac-Operator und die Topologie der Mannigfaltigkeiten V

Motivation (Gel'fand, 1960). Bemerkte, dass der Index eines elliptischen Operators P i. A. *homotopie-invariant* ist

$\Rightarrow$ P sollte eine allgemeine Index-Formel folgender Gestalt erfüllen:

$$\mathrm{index}(P) = \int_M f(P,R)\,dM$$

[Vorarbeiten: Agranovich, Bojarski, Dynin, Seeley]

Insbesondere: Falls ein Operator D existiert mit

- $\mathrm{index}(D) = \dim\ker D - \dim \mathrm{coker} D = \frac{1}{8}\sigma(M^4)$,
- $\displaystyle\int_M f(P,R)\,dM = \frac{1}{24}\int_{M^4} p_1$

und $\mathrm{index}(D) = 0 \bmod 2$, dann folgt der Satz von Rochlin sofort!

1950-1970: Der Dirac-Operator und die Topologie der Mannigfaltigkeiten VI

Antwort (Atiyah-Singer, 1962-63): (auf sehr allgemeinen Mfkten)

Der Dirac-Operator D leistet das Gewünschte!

Er wurde von Michael Atiyah und Isadore Singer wieder entdeckt. Der Beweis funktioniert, weil der Index

- invariant unter vielen Deformationen und sog. ‘Kobordismen’ ist
- gute ‘multiplikative’ Eigenschaften hat
- einen additiven Homomorphismus auf $K^0(M)$ definiert

Abel Prize winners Michael Atiyah (left) and Isadore Singer.

(2004)

Das Quadrat des Riemann'schen Dirac-Operators D^g

N.B. Um die gleiche Zeit fingen mehrere Mathematiker an, Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren zu untersuchen

[E. Kähler/1960, A. Lichnerowicz/1962, G. Karrer/1963]

- $\mathrm{Scal}^g, \mathrm{Scal}^g_{\min}$: Riemann'sche Skalarkrümmung bzw. Minimum auf M^n
- Δ: Laplace-Operator im Spinorbündel

Schrödinger (1932), Lichnerowicz (1962):

$$\boxed{(D^g)^2 = \Delta + \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g}$$

$\sim$ „Wurzel aus Laplace-Operator“ für $\mathrm{Scal}^g = 0$

1. Verschwindungssätze:

$\Rightarrow$ Existiert ein paralleler Spinor ($\nabla^g\psi = 0$), dann ist $\mathrm{Scal}^g = 0$ (sogar: $\mathrm{Ric}^g = 0$ und $\mathrm{Hol} = \mathrm{SU}(n), \mathrm{Sp}(n), G_2$ oder $\mathrm{Spin}(7)$)

$\Rightarrow$ Existiert eine Metrik mit $\mathrm{Scal}^g > 0$, dann ist $\ker D^g = 0$, $\mathrm{coker} D^g = 0$, also $\mathrm{index}(D^g) = 0$ und damit das entsprechende Krümmungsintegral ($\hat{A}$-Geschlecht) $= 0$ [Lichnerowicz, 1963]

Das Quadrat des Riemann'schen Dirac-Operators D^g II

2. EW-Abschätzungen: (EW explizit auszurechnen ist i. a. hoffnungslos)

$\Rightarrow \ \lambda \ \geq \ \frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min}$

Aber: Diese Abschätzung ist nicht optimal, der Wert $\mathrm{Scal}^g_{\min}/4$ wird nie angenommen, wenn er $\neq 0$ ist!

Idee: Deformiere $\nabla^g_X\psi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda \ \geq \ \frac{n}{4(n-1)}\mathrm{Scal}^g_{\min}}$ [Friedrich, 1980]

Mfkten, auf denen sogar „$=$“ gilt, haben

- eine besonders *interessante geometrische Struktur*

- Ein Spinorfeld ψ, das nicht nur ein Eigenvektor des Dirac-Operators ist, sondern sogar die *Killing-Gleichung* erfüllt („ableiten $=$ multiplizieren“):

$$\nabla^g_X\psi = \mu\, X\cdot\psi \qquad (\mu\in\mathbb{R})$$

Wir zitieren nur ein Beispiel:

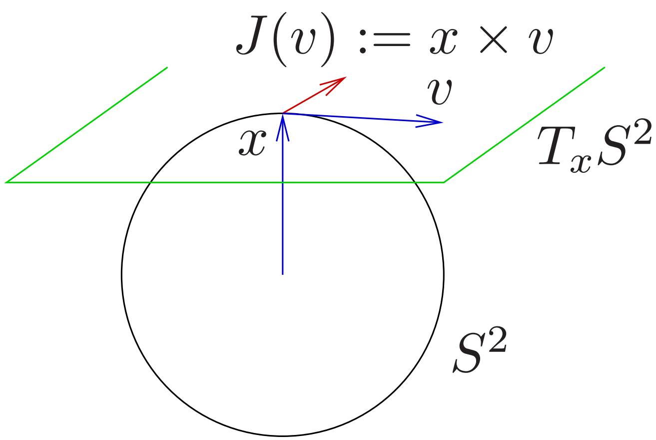
Fast-Kähler'sche Mannigfaltigkeiten

Dfn. Eine *fast komplexe Struktur* J ist eine Abbildung auf Vektorfeldern, die $J^2 = -\mathrm{id}$ erfüllt.

Bspl. $\mathbb{C}$ mit $J =$ Multiplikation mit i.

- (S^6, g_{can}): $S^6 \subset \mathbb{R}^7$ hat fast komplexe Struktur J, die vom „Kreuzprodukt" auf $\mathbb{R}^7$ induziert wird.
- J ist nicht integrabel, $\nabla^g J \neq 0$
- **Problem (Hopf)**: Besitzt S^6 eine (integrable) komplexe Struktur?

Für $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:



J ist ein Beispiel einer sog. „fast Kähler'schen"-Struktur: $\nabla^g_X J(X) = 0$.

Satz. [Friedrich-Grunewald, 1985]

(M^6, J) ist fast Kähler'sch $\Leftrightarrow$ es ex. auf M^6 Lösung der Killing-Gleichung

$\Leftrightarrow$ Gleichheit in der EW-Ungleichung

Seit 1980: Der Dirac-Operator und die Geometrie der Mannigfaltigkeiten

Philosophie: Folgende Objekte sollten in Verbindung stehen:

Lösungen spinorieller Feldgleichungen	$\longleftrightarrow$	geometrische Strukturen

Anwendungen & Ergebnisse:

- Besseres geometrisches Verständnis vieler Klassen von Mfkten (Spinorfelder sind nun natürliches Instrument zur Untersuchung der Geometrie, unabh. von einer physikalischen Interpretation)

- Noch bessere EW-Abschätzungen auf besonderen Klassen von Mfkten (Kähler-Mfkten, hyper-Kähler-Mfkten. . .)

- Fortschritte in der Twistor-Theorie und der Klassifikation der Instantonen (Lsg der Yang-Mills-Gleichung)

Spinorfelder in neuem Gewand

Relativistische Elektrodynamik
1900-1940

beschreibt Punktteilchen mit elektrischer Ladung als abelsche Eichtheorie
Eichtransformation = Drehung in einer Ebene

Maxwell Lorentz Einstein Weyl Dirac

↓

Standardmodell der Elementarteilchen
1950-1980

beschreibt Punktteilchen mit zusätzlichen Eich-eigenschaften wie Ladung, Isospin, Farbe. . .
interne Symmetrien werden beschrieben durch Lie-Gruppen

Yang Mills Salam Weinberg

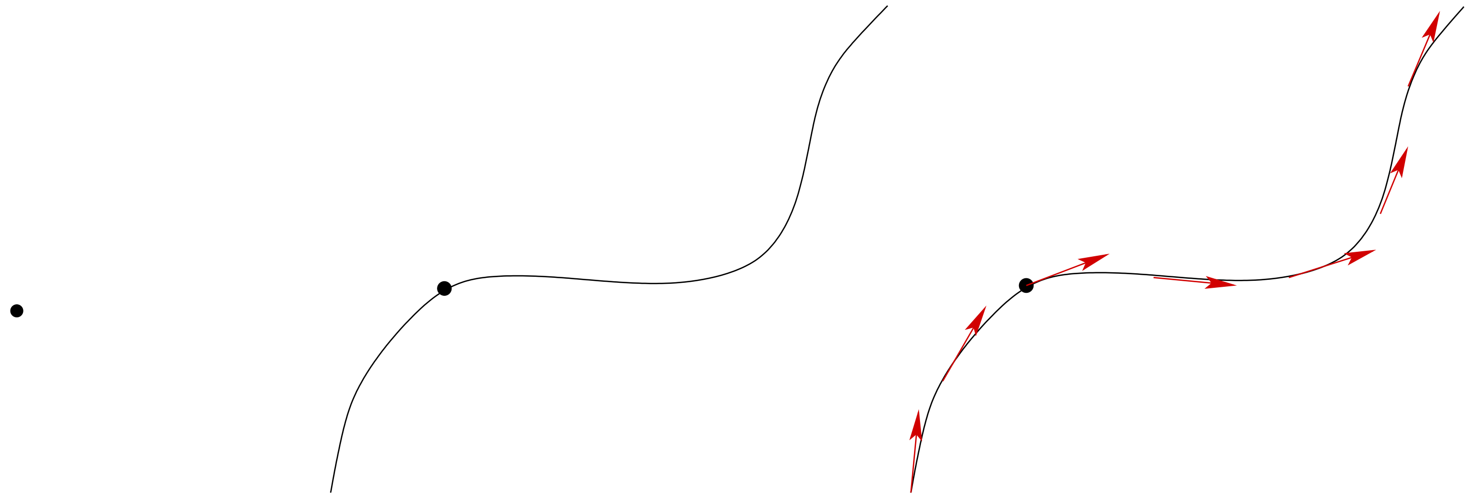
↓

vereinigte Feldtheorien
(super-)strings, Supergravitation
> 1980

Quantisierte interne Symmetrien sind Spinorfelder auf einer Mfkt mit spezieller geometrischer Struktur

Nieuwenhuizen Strominger Seiberg Witten ...

Klassische allg. Relativitätstheorie und Elektromagnetismus



Punktteilchen

bewegt sich entlang einer Kurve γ

physik. Wirkung: $\int_\gamma A$

für Potential A : 1-Form

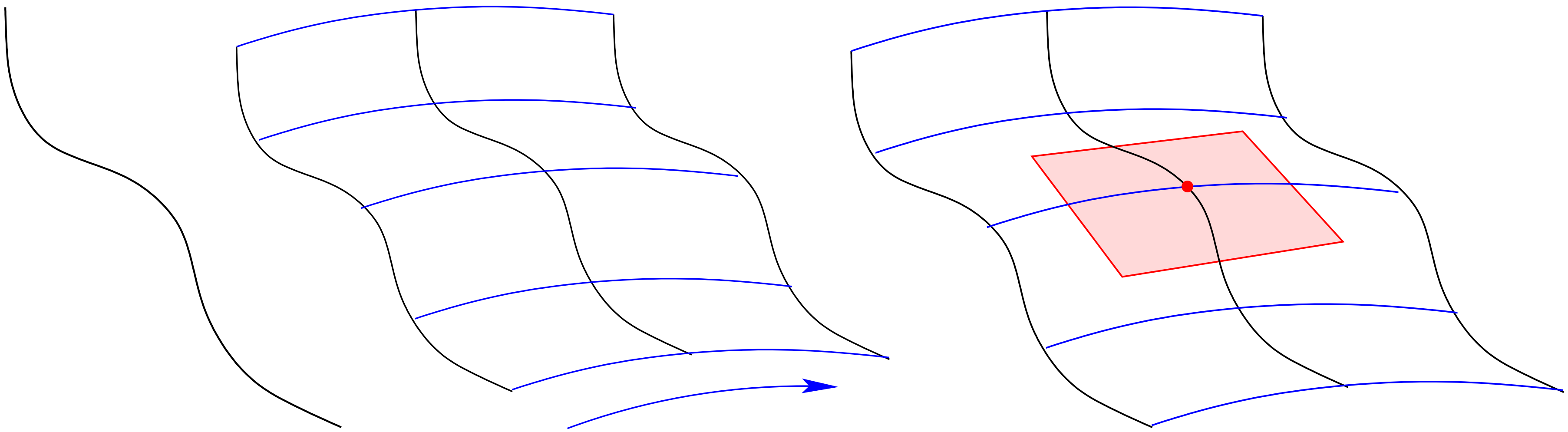
Feldstärke
$F = dA$: 2-Form

$\Leftrightarrow$

geometrisches Konzept der
Krümmung eines Zusammenhangs

Krümmung misst die Abweichung vom Vakuum !

Moderne vereinheitliche Theorien



"string" Teilchen

bewegt sich entlang einer Fläche F

Wirkung: $\int_F \tilde{A}$ für Potential höherer Ordnung $\tilde{A}$: 2-Form

Feldstärke $F = dA$: 3-Form $\Leftrightarrow$ geometrisches Konzept der Torsion eines Zusammenhangs

Torsion misst die Abweichung vom Vakuum ("integrabler Fall") !

Zusammenhänge mit Torsion

• Ersetze die „naive Ableitung“ ∇^g (den LC-Zusammenhang) durch eine Ableitung ∇ mit Torsion ! Dieser lässt sich schreiben als

$$\nabla = \nabla^g + \text{ Torsionstensor } T$$

Ursprung (Cartan, 1924): Stellte sich den Torsionstensor T als einen inneren „Drehimpuls“ des Raums dar.

Besonders interessant: Zusammenhänge, die die Dynamik nicht ändern, also die gleichen Geodäten (= kürzeste Verbindungsgeraden) wie der LC-Zusammenhang haben ($\Leftrightarrow\ T \in \Lambda^3(M^n)$).

Auf vielen Mfkten mit spezieller geometrischer Struktur existieren solche Zusammenhänge

$\longrightarrow$ der Riemann'sche Dirac-Operator muss entsprechend verallgemeinert werden:

- Dolbeault-Operator einer fast Hermite'schen Mfkt (z. B. fast Kähler'sche Mfkt)
- Kostant-Operator eines natürlich reduktiven homogenen Raums
- „Kontakt-Dirac-Operator" einer Kontakt-Mfkt

Alle diese Operatoren sind Dirac-Operatoren $D = \sum e_i \nabla_{e_i}$ für einen *metrischen Zusammenhang* ∇ *mit Torsion* T.

Pb: Analogon der Quadratformel von Schrödinger-Lichnerowicz?

Das Quadrat des Dirac-operators

Satz. „Universelle“ S-L-Formel: [IA- Friedrich, 2004]

$$(D^{1/3})^2 \;=\; \Delta_T - \frac{1}{4}T^2 + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g + \frac{1}{8}\|T\|^2$$

[$1/3$-Reskalierung: Slebarski (1987), Bismut (1989), Kostant, Goette (1999), IA (2002)]

— richtige Analogon der klassischen Schrödinger-Lichnerowicz-Formel.

Folgerungen:

1. Verschwindungssätze

2. EW-Abschätzungen (nach geeigneter Deformation)

Verschwindungssätze

Bekannt: Calabi-Yau-Mfkten und parallele G_2- und $\mathrm{Spin}(7)$-Mfkten

- dienen als Vakuum-Modelle in der Superstringtheorie $(T = 0)$ [$>$ 1986]
- haben ein ∇^g-paralleles Spinorfeld ($\sim$ Supersymmetrie) [McWang, 1989]
- sind Ricci-flach und, per Dfn, kompakt [Bonan, 1966]

Satz. Auf einer CY-Mfkt oder einer parallelen G_2- und $\mathrm{Spin}(7)$-Mfkt kann ein Zusammenhang mit Torsion T nur für $T = 0$ parallele Spinoren haben. [IA-Friedrich, 2004]

— 'Starrheit' kompakter Vakuum-lösungen ! —

Satz. Es existiert eine nicht kompakte, Ricci-flache 7-dimensionale homogene Mfkt M mit einer Familie $(T_h, \psi_h) \in \Lambda^3 M \times \Sigma(M)$ derart, dass ψ_h parallel bzgl. des Zusammenhangs ∇^h mit Torsion T_h ist,

$$\nabla^h \psi_h = 0,$$

und für $h = 1$ gilt: $T_h = 0$ und ψ_h ist ∇^g-parallel. [IA-Chiossi-Fino, 2006]

– erstes Beispiel einer Mfkt, die gleichzeitig eine Geometrie ohne Torsion und eine mit Torsion trägt! –

Zusammenfassend:

- Spinorfelder sind mittlerweile genauso natürliche Objekte wie Funktionen, unabhängig von einer eventuellen physikalischen Interpretation (welche sich ändern kann)

- So wie der Laplace-Operator dem Studium von Funktionen auf Mfkten dient, ist der Dirac-Operator *das* zentrale Werkzeug zum Studium von Spinorfeldern – auch, wenn man gar nicht die Dirac-Gleichung untersuchen möchte!

- Mathematik und theoretische Physik liefern sich auch weiterhin gegenseitig spannende Impulse, allerdings bei zunehmender Komplexität

- Geometrie, Feldgleichungen und topologische Invarianten haben interessante Querbeziehungen, die bereichernd für unterschiedliche Gebiete sind