

2.November 2006

3. Übung zu „Grundlagen der funktionalen Programmierung“,

Abgabe: 9.November 2006 vor der Vorlesung

WS06/07

Aufgaben

3.1 Wahrheitswerte im λ -Kalkül

3 Punkte

Definieren Sie λ -Abstraktionen AND, OR und NOT für die Verknüpfung und Verneinung von Wahrheitswerten.

3.2 Church-Zahlen

4 Punkte

Welche arithmetischen Operationen auf Church-Zahlen werden durch die folgenden λ -Ausdrücke definiert:

- (a) $\lambda n m f x. m n f x$
- (b) $\lambda n f x. n (\lambda y z. z (y f)) (K x) I$

3.3 Alternative Zahldarstellung

5 Punkte

Statt über Church-Numerale können natürliche Zahlen im λ -Kalkül auch mit Hilfe geschachtelter Paare dargestellt werden. Dabei entspricht die dargestellte Zahl der Schachtelungstiefe.

$$\begin{aligned}\widehat{0} &\equiv \lambda x. x \\ \widehat{1} &\equiv (\text{False}, \widehat{0}) \\ \widehat{2} &\equiv (\text{False}, \widehat{1}) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Definieren Sie zu dieser Darstellung passend eine Nachfolgerfunktion \widehat{suc} , eine Vorgängerfunktion \widehat{pred} und ein Nullprädikat \widehat{iszero} so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}\widehat{suc} \widehat{n} &\Leftrightarrow_{\beta}^* \widehat{n+1} & (1) \\ \widehat{pred} (\widehat{suc} \widehat{n}) &\Leftrightarrow_{\beta}^* \widehat{n} & (2) \\ \widehat{iszero} \widehat{0} &\Leftrightarrow_{\beta}^* \text{True} & (3) \\ \widehat{iszero} (\widehat{suc} \widehat{n}) &\Leftrightarrow_{\beta}^* \text{False} & (4)\end{aligned}$$

Weisen Sie die Gleichungen (1) bis (4) nach.