

30. November 2006

8. Übung zu „Grundlagen der funktionalen Programmierung“,

Abgabe: 14. Dezember 2006 vor der Vorlesung

WS06/07

Aufgaben

8.1 Halbordnung

3 Punkte

Betrachten Sie die Teilbarkeitsrelation $m \mid n$ definiert durch $\exists i \in \mathbb{N} : m * i = n$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (\mathbb{N}, \mid) eine Halbordnung ist.

Ist diese Halbordnung vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.

8.2 Fixpunkttheorie

5 Punkte

(a) Eine Halbordnung $(D, <)$ heiße *stationär*, falls zu jeder Kette $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\}$ in D ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $k_m = k_n \forall m > n$ ist.

Es seien $(D, <)$ und $(E, <_E)$ Halbordnungen und f eine Abbildung $f : D \rightarrow E$. Zeigen Sie: Ist $(D, <)$ stationär und f monoton, so ist f bereits *stetig*.

(b) Beweisen Sie das *Lemma von Park*:

Sei (D, \sqsubseteq) eine vollständige Halbordnung, sowie $f : D \rightarrow D$ stetig.

Dann gilt: $\forall d \in D : f(d) \sqsubseteq d \curvearrowright \text{fix } f \sqsubseteq d$.

8.3 Monotone und strikte Funktionen über $Bool_{\perp}$

4 Punkte

(a) Wieviele Funktionen $Bool_{\perp} \rightarrow Bool_{\perp}$ gibt es? Wieviele davon sind strikt? Wieviele sind monoton?

(b) Geben Sie alle monotonen Fortsetzungen von

$$\text{and, or} : Bool \rightarrow Bool \rightarrow Bool$$

auf $Bool_{\perp} \rightarrow Bool_{\perp} \rightarrow Bool_{\perp}$ an. Zeichnen Sie Diagramme für die Inklusionsbeziehungen zwischen den verschiedenen Fortsetzungen. Was ist die operationelle Interpretation der verschiedenen Fortsetzungen?