PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
Dipl.Inf. J.Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße

3.November 2004

Übungen zu „Semantik von Programmiersprachen“, WS 2004/05

Nr. 2, Besprechung mündlicher Aufgaben: 8. November 2004 in der Übung,
Abgabe der Hausaufgaben: 10. November 2004 in der Vorlesung

Mündliche Aufgaben

2.1 **Terminationsbeweis**
Gegeben sei die folgende **IMP**-Anweisung, die Euklids Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier positiver ganzer Zahlen implementiert:

$$\text{Euklid} \equiv \textbf{while } \neg(M = N) \textbf{ do } \textbf{if } M \leq N \textbf{ then } N := N - M \textbf{ else } M := M - N$$

Beweisen Sie, dass für alle $\sigma \in \Sigma$ gilt:

$$\sigma(M) \geq 1 \wedge \sigma(N) \geq 1 \quad \curvearrowright \quad \exists \sigma'. \langle \text{ Euklid}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$$

Hinweis: Benutzen Sie eine wohlfundierte Relation auf Umgebungen.

2.2 **Einzelschrittsemantik**

(a) Führen Sie für das Programm

$$\textbf{while } \neg(x = 1) \textbf{ do } (x := x + y; y := y - x),$$

im Zustand $\sigma_\emptyset[X \rightarrow 9, Y \rightarrow 1]$ eine Auswertung in Einzelschritten durch.

(b) Begründen Sie mit Hilfe der Einzelschrittsemantik, dass dieses Programm für bestimmte Zustände (welche?) nicht terminiert.

2.3 (a) Erweitern Sie die Einzelschrittsemantik von IMP um ein Konstrukt

$$\textbf{assert } \; b \textbf{ before } c$$

Die Anweisung `c` soll nur ausgeführt werden, falls `b` wahr ist; ansonsten soll die Berechnung fehlschlagen.

(b) Beweisen Sie:

i. **assert true before** $c \approx c$
ii. **assert false before** $c \not\approx$ **skip**
iii. **assert false before** $c \not\approx$ **while true do skip**

Bitte wenden!

Schriftliche Aufgaben

2.4 Induktion

4 Punkte

(a) Definieren Sie induktiv eine Abbildung

$$FV : \mathbf{AExp} \to \mathcal{P}(\mathbf{Loc})$$

die zu einem arithmetischen Ausdruck die Menge der in diesem Ausdruck vorkommenden (freien) Variablen bestimmt.

(b) Beweisen Sie induktiv die folgende Aussage:

Seien $a \in \mathbf{AExp}$ und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ mit $\sigma(X) = \sigma'(X)$ für alle $X \in FV(a)$. Dann gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$\langle a, \sigma \rangle \to n \text{ gdw. } \langle a, \sigma' \rangle \to n.$$

2.5 Wohlfundierte Relationen

4 Punkte

(a) Begründen Sie für die angegebenen Relationen ausführlich, ob sie (evtl. unter bestimmten Nebenbedingungen) wohlfundiert sind:

i. Relation $<$ auf $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$

ii. Relation $\subset$ auf $\mathcal{P}(M)$ für eine Menge M.

iii. Die folgende Relation auf Wörtern über $\Delta = \{a \dots z\}$:
$v < w$, falls $|v|_a + |v|_b < |w|_a + |w|_b$
(wobei $\forall w \in \Delta^*, a \in \Delta :$
$|w|_a =$ Zahl der a in w)

Sei $\prec$ eine wohlfundierte Relation über einer Menge B. Zeigen Sie:

(b) Die transitive Hülle $\prec^+$ ist ebenfalls wohlfundiert.

(c) Die reflexive, transitive Hülle $\preceq^+$ ist eine Halbordnung.

2.6 Einzelschrittsemantik

4 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie für $c_1, c_2 \in$ **Cmd** , $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und $k \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen:

(a) $\langle c_1, \sigma \rangle \Rightarrow^k \sigma' \quad \curvearrowright \quad \langle c_1; c_2, \sigma \rangle \Rightarrow^k \langle c_2, \sigma' \rangle$

(b) $\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \Rightarrow^* \langle c_2, \sigma' \rangle \quad \curvearrowright \quad \langle c_1, \sigma \rangle \Rightarrow^* \sigma'$