

## Übungen zu „Semantik von Programmiersprachen“, WS 2004/05

Nr. 4, Besprechung mündlicher Aufgaben: 22. November 2004 in der Übung,

Abgabe der Hausaufgaben: 24. November 2004 vor der Vorlesung

---

### Mündliche Aufgaben

- 4.1 (a) Bestimmen Sie das Funktional  $\Phi_c : (\Sigma \rightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$  zu folgender Anweisung:

$c \equiv \text{while } \neg(X = 0) \text{ do } X := X - 1$

- (b) Welche der folgenden Funktionen sind *Fixpunkte des Funktionals*?

$$\begin{aligned} g_1(\sigma) &= \sigma & g_4(\sigma) &= \begin{cases} \sigma[X \rightarrow 0] & , \sigma(X) \geq 0 \\ \text{undef.} & , \text{sonst} \end{cases} \\ g_2(\sigma) &= \sigma[X \rightarrow 0] & g_5(\sigma) &= \begin{cases} \sigma[X \rightarrow 0] & , \sigma(X) \geq 0 \\ \sigma & , \text{sonst} \end{cases} \\ g_3(\sigma) &= \text{undef. } \forall \sigma \in \Sigma \end{aligned}$$

- 4.2 Die partiellen Funktionen  $g_1, g_2, g_3 : \Sigma \rightarrow \Sigma$  seien wie folgt definiert:

$$g_1(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & \text{falls } \sigma(X) \text{ gerade} \\ \text{undef.}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad g_2(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & \text{falls } \sigma(X) \text{ prim} \\ \text{undef.}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad g_3(\sigma) = \sigma$$

- (a) Ordnen Sie diese partiellen Funktionen gemäß der durch Graphinklusion gegebenen Halbordnung  $(\Sigma \rightarrow \Sigma, \sqsubseteq)$ .
- (b) Bestimmen Sie eine partielle Funktion  $g_4 \neq g_i$ , so dass  $g_4 \sqsubseteq g_i$  (für  $i \in \{1, 2, 3\}$ ).
- (c) Geben Sie eine partielle Funktion  $g_5 \neq g_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) an, für die gilt:

$$g_1 \sqsubseteq g_5, g_2 \sqsubseteq g_5, g_5 \sqsubseteq g_3$$

- 4.3 Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionale  $\Phi_i : (\Sigma \rightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$  bzgl. der durch Graphinklusion gegebenen Halbordnung  $\sqsubseteq$  *monoton* sind:

- (a)  $\Phi_1(f) = f$
- (b)  $\Phi_2(f) = \begin{cases} g_1 & , \text{falls } f = g_2 \\ g_2 & , \text{sonst.} \end{cases}$  , wobei  $g_1, g_2 : \Sigma \rightarrow \Sigma$  mit  $g_1 \neq g_2$ .
- (c)  $\Phi_3(f)(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & , \text{falls } \sigma(X) \neq 0 \\ \sigma & , \text{sonst.} \end{cases}$

## Schriftliche Aufgaben

4.4 Diese Aufgabe verallgemeinert den Begriff der Induktion über Herleitungen auf die allgemeinste Form: Regelinstanzen über einer *beliebigen Menge*  $X$ .

8 Punkte

**Def.** Ein Paar  $(A/x)$  mit einem Element  $x \in X$  und einer Teilmenge  $A \subseteq X, |A| < \infty$  heißt *Regelinstanz über  $X$* .  $x$  heißt *Folgerung*, die Elemente  $a_i \in A$  *Voraussetzungen* der Regel. Eine Menge von Regelinstanzen über  $X$  heißt *Regelsystem über  $X$* .

Im folgenden sei  $X$  stets eine beliebige Menge und  $R$  ein Regelsystem über  $X$ .

- (a) Geben Sie die Menge  $X$  an, mit der die Herleitungsinduktion der Vorlesung arbeitet. / 1

**Def.** Eine Teilmenge  $Q \subseteq X$  heißt *unter  $R$  abgeschlossen*, wenn gilt:

$$\forall (A/x) \in R : A \subseteq Q \leadsto x \in Q$$

- (b) Bestimmen Sie für das Regelsystem  $R = \{(\{a\}/b), (\{b\}/c), (\{b, c\}/d), (\{c\}/b)\}$  über  $X = \{a, b, c, d\}$  alle unter  $R$  abgeschlossenen Teilmengen von  $X$ . / 2

**Def.** Wir definieren eine Abbildung.  $\hat{R} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ :

$$\hat{R}(Q) = \{x \in X \mid \exists Y \subseteq Q : (Y/x) \in R\}$$

$\hat{R}$  bestimmt also alle aus der Teilmenge  $Q$  *in einem Schritt* ableitbaren Elemente.

Wir betrachten speziell:  $Q_0 = \emptyset, Q_{i+1} = \hat{R}(Q_i)$  für  $i \in \mathbb{N}$ .

- (c) Zeigen Sie, dass  $\hat{R}$  monoton bzgl.  $\subseteq$  ist und folgern Sie  $\forall i \in \mathbb{N} : Q_i \subseteq Q_{i+1}$ . / 2
- (d) Beweisen Sie:  $Q = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$  ist *kleinste unter  $R$  abgeschlossene Menge*, d.h.: / 3
- $Q$  ist unter  $R$  abgeschlossen
  - $\forall Q' \subseteq X : Q'$  unter  $R$  abgeschlossen  $\leadsto Q \subseteq Q'$ .

4.5 Betrachten Sie das folgende Fragment der Fakultätsberechnung:

4 Punkte

**while**  $\neg(X = 1)$  **do**  $(Y := Y * X; X := X - 1)$

- (a) Bestimmen Sie das durch diese Anweisung festgelegte Funktional

$$\Phi : (\Sigma \longrightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \longrightarrow \Sigma).$$

- (b) Geben Sie mindestens zwei verschiedene Fixpunkte von  $\Phi$  an.