PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG D-35032 Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik Hans Meerwein Straße
Prof. Dr. R. Loogen
J.Berthold

2.Mai 2006

2. Übung zu "Semantik von Programmiersprachen", SS 2006

Abgabe schriftlicher Aufgaben: Di, 9.Mai 2006 (vor der Vorlesung)
Besprechung mündlicher Aufg.: 4.Mai 2006 in der Übung

Mündliche Aufgaben

2.1 **Wohlfundierte Relationen**

Begründen Sie für die angegebenen Relationen, ob sie wohlfundiert sind:

(a) Relation $\subseteq$ auf $P(M)$ für eine Menge M.

(b) die folgende Relation auf $\mathbb{Z}$:

$$n <^2 m \;:\Leftrightarrow n^2 < m^2$$

(c) Relation $<$ auf $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$

(d) die lexikographische Ordnung $<_{lex}$ auf Wörtern über $\Delta = \{a \dots z\}$

(e) Die folgende Relation auf Wörtern über $\Delta = \{a \dots z\}$:
$v < w$, falls $|v|_a + |v|_b < |w|_a + |w|_b$
(wobei $\forall w \in \Delta^*, a \in \Delta$:
$|w|_a =$ Zahl der a in w)

2.2 **Induktion**

(a) Definieren Sie induktiv eine Abbildung

$$FV : \mathbf{AExp} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{Loc})$$

die zu einem arithmetischen Ausdruck die Menge der in diesem Ausdruck vorkommenden (freien) Variablen bestimmt.

(b) Beweisen Sie induktiv die folgende Aussage:

Seien $a \in \mathbf{AExp}$ und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ mit $\sigma(X) = \sigma'(X)$ für alle $X \in FV(a)$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$\langle a, \sigma \rangle \rightarrow n \;\text{ gdw. }\; \langle a, \sigma' \rangle \rightarrow n.$$

2.3 **Wohlfundierte Relationen und Halbordnungen**

Sei $\prec$ eine wohlfundierte Relation über einer Menge B. Zeigen Sie:

(a) Die transitive Hülle $\prec^+$ ist ebenfalls wohlfundiert.

(b) Die reflexive, transitive Hülle $\preceq^+$ ist eine Halbordnung.

Bitte wenden!

Schriftliche Aufgaben

2.4 Induktionsprinzipien

6 Punkte

Sei Δ ein Alphabet (d.h. eine endliche, nicht-leere Menge). Eine Zeichenkette über Δ ist eine Folge $a_1 \dots a_n$ von Symbolen $a_j \in \Delta$ mit $0 \leq j \leq n, n \geq 0$. Die Anzahl n der Symbole einer Zeichenkette bezeichnet man als Länge der Zeichenkette. Die leere Zeichenkette hat die Länge 0. Zwei Zeichenketten u und v können zu der Zeichenkette uv konkateniert werden.

> **Behauptung:** Es existiert keine Zeichenkette u, für die $au = ub$ mit zwei verschiedenen Symbolen a und b aus Δ.

Zeigen Sie diese Behauptung

(a) mittels vollständiger Induktion

(b) durch einen Widerspruchsbeweis

(c) mittels einer (von der vollständigen Induktion verschiedenen) wohlfundierten Induktion

2.5 Terminationsbeweis

6 Punkte

Gegeben sei die folgende WHILE-Anweisung, die Euklids Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier positiver ganzer Zahlen implementiert:

$$\text{Euklid} \equiv \textbf{while } \neg(M = N) \textbf{ do } \textbf{if } M \leq N \textbf{ then } N := N - M \textbf{ else } M := M - N$$

Beweisen Sie, dass für alle $\sigma \in \Sigma$ gilt:

$$\sigma(M) \geq 1 \wedge \sigma(N) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \sigma'. \langle \text{ Euklid}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$$

Hinweis: Benutzen Sie eine wohlfundierte Relation auf Zuständen.