

3. Übung zu “Semantik von Programmiersprachen”, SS 2006

Abgabe schriftlicher Aufgaben: Di, 16.Mai 2006 (vor der Vorlesung)

Besprechung mündlicher Aufg.: 11.Mai 2006 in der Übung

Mündliche Aufgaben

3.1 Einzelschrittsemantik

- (a) Führen Sie für das Programm

while $\neg(x = 1)$ **do** $(x := x + y; y := y - x),$

im Zustand $\sigma_\emptyset[X \rightarrow 9, Y \rightarrow 1]$ eine Auswertung in Einzelschritten durch.

- (b) Begründen Sie mit Hilfe der Einzelschrittsemantik, dass dieses Programm für bestimmte Zustände (welche?) nicht terminiert.

3.2 Beschleunigte Auswertung Boolescher Ausdrücke

Die Auswertung Boolescher Ausdrücke der Form $b_1 \wedge b_2$ und $b_1 \vee b_2$ kann beschleunigt werden, indem man die folgenden Strategien einsetzt:

- (a) **Sequentielle Auswertung:** Falls die Auswertung einen Ausdruck der Gestalt **false** $\wedge b_2$ und **true** $\vee b_2$ ergibt, wird der zweite Teilausdruck nicht ausgewertet, weil das Gesamtergebnis unabhängig von dessen Wert ist.
- (b) **Parallele Auswertung:** Beide Teilausdrücke werden gleichzeitig ausgewertet. Ein Boolescher Ausdruck der Form $b_1 \vee b_2$ wird zu **true** ausgewertet, wenn sich b_1 oder b_2 zu **true** auswerten lässt.

Geben Sie Herleitungsregeln der Einzelschrittsemantik für diese Auswertungsvarianten Boolescher Ausdrücke an.

Schriftliche Aufgaben

- 3.3 Beweisen Sie die **Vollständigkeit der Einzelschrittsemantik** bezüglich der Gesamtschrittsemantik:

4 Punkte

$$\forall c \in \mathbf{Cmd} \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma : (c, \sigma) \rightarrow \sigma' \curvearrowright (c, \sigma) \Rightarrow^* \sigma'$$

Sie können das entsprechende Resultat für arithmetische und Boolesche Ausdrücke voraussetzen.

Def. X sei eine beliebige Menge.

Ein Paar (A/x) mit einem Element $x \in X$ und einer endlichen Teilmenge $A \subseteq X$, $|A| < \infty$ heißt *Regelinstanz über X* .

x heißt *Folgerung*, die Elemente $a_i \in A$ *Voraussetzungen* der Regel.

Eine Menge von Regelinstanzen über X heißt *Regelsystem über X* .

- (a) Geben Sie die Menge X an, mit der die Herleitungsinduktion der Vorlesung arbeitet. / 1

Im folgenden sei X stets eine beliebige Menge und R ein Regelsystem über X .

Def. Eine Teilmenge $Q \subseteq X$ heißt *unter R abgeschlossen*, wenn gilt:

$$\forall (A/x) \in R : A \subseteq Q \leadsto x \in Q$$

- (b) Bestimmen Sie für das Regelsystem $R = \{(\{a\}/d), (\{b\}/a), (\{a, d\}/c), (\{d\}/a)\}$ über $X = \{a, b, c, d\}$ alle unter R abgeschlossenen Teilmengen von X . / 2

Def. Wir definieren eine Abbildung. $\hat{R} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$:

$$\hat{R}(Q) = \{x \in X \mid \exists Y \subseteq Q : (Y/x) \in R\}$$

$\hat{R}$ bestimmt also alle aus der Teilmenge Q *in einem Schritt* herleitbaren Elemente.

Wir betrachten speziell: $Q_0 = \emptyset$, $Q_{i+1} = \hat{R}(Q_i)$ für $i \in \mathbb{N}$.

- (c) Zeigen Sie, dass $\hat{R}$ monoton bzgl. $\subseteq$ ist und folgern Sie $\forall i \in \mathbb{N} : Q_i \subseteq Q_{i+1}$. / 2
- (d) Beweisen Sie: $Q = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ ist *kleinste unter R abgeschlossene Menge*, d.h.: / 3
- Q ist unter R abgeschlossen
 - $\forall Q' \subseteq X : Q'$ unter R abgeschlossen $\leadsto Q \subseteq Q'$.