Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. I. Heckenberger

Sommersemester 2010

Übungen zur Algebra II

– Blatt 7 –

Abgabe Dienstag, 01.06.2010, 12 Uhr s.t.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(a) Man finde eine n-te Wurzel aus 3 in $\mathbb{F}_{11}$ (falls es sie gibt) für $n = 9, 10$, beziehungsweise 11.

(b) Man finde einen Erzeuger für $(F_q \setminus \{0\}, \cdot)$ für $q = 7$ und $q = 9$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Seien p eine Primzahl, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $q = p^n$. Man bestimme alle Polynome $f(x)$ in $\mathbb{F}_q[x]$ mit $f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{F}_q$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Seien $L = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ und $M = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$. Man gebe einen Körperisomorphismus zwischen L und M an.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei K ein endlicher Körper und seien $a, b, c \in K$. Man zeige, dass eine der Zahlen a, b, c, ab, bc, abc die dritte Potenz eines Elements von K ist.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^{2!}} \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{F}_{p^{n!}} \subseteq \mathbb{F}_{p^{(n+1)!}} \subseteq \cdots$ eine Kette von Körperinklusionen. Man beweise, dass $\mathbb{F}_{p^\infty} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{F}_{p^{n!}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_p$ ist.