Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. I. Heckenberger Sommersemester 2010

# Übungen zur Algebra II

– Blatt 9 –

Abgabe Dienstag, 15.06.2010, 12 Uhr s.t.

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)
Sei $n$ eine Primzahl. Man beweise, dass es keine echte Untergruppe der symmetrischen Gruppe $S_n$ gibt, die sowohl einen 2-Zykel als auch einen $n$-Zykel enthält.

**Aufgabe 2.** (4 Punkte)
Sei $L/K$ eine Galoiserweiterung und sei $M$ ein Zerfällungskörper über $L$ eines separablen Polynoms $f \in K[X]$. Man zeige, dass dann $M/K$ galoissch ist.

**Aufgabe 3.** (4 Punkte)
Sei $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_t$ ein Radikalturm mit $K_i \neq K_j$ für $i \neq j$. Man zeige, dass es einen Radikalturm $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_q$ und Primzahlen $p_1, \ldots, p_q$ gibt derart, dass $L_0 = K_0$, $L_q = K_t$, $\{K_0, K_1, \ldots, K_t\} \subseteq \{L_0, L_1, \ldots, L_q\}$ und $L_i/L_{i-1}$ ist rein vom Typ $p_i$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$.

**Aufgabe 4.** (4 Punkte)
Sei $K$ ein Körper und sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Man bestimme, welche der folgenden Gruppen auflösbar sind.

(a) $\mathrm{GL}(n, K)$ (b) $\{a \in M(n, K) | a_{ij} = 0 \text{ für } i > j,\ a_{ii} \neq 0 \text{ für alle } i\}$

(c) die Diedergruppe $\mathbb{D}_n$.

**Aufgabe 5.** (4 Punkte)
Sei $L/K$ eine Galoiserweiterung. Man beweise die Eigenschaften der Normabbildung $N : L^\times \to K^\times$ in Lemma 7.30.