Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. I. Heckenberger

Sommersemester 2010

Übungen zur Algebra II

– Blatt 10 –

Abgabe Dienstag, 22.06.2010, 12 Uhr s.t.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei L/K eine Galoiserweiterung und sei $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Für jedes $\alpha \in L$ sei $\mathrm{T}(\alpha) = \sum_{\sigma\in G} \sigma(\alpha)$.

(a) Man beweise, dass $T(\alpha) \in K$ und $T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$ für jedes $\alpha, \beta \in L$.

(b) Man zeige, dass T nicht identisch Null ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei L/K eine Galoiserweiterung und sei $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Angenommen G ist zyklisch. Sei σ ein Erzeuger von G und sei $\tau = \mathrm{id} - \sigma$. Sei T wie in Aufgabe 1. Man beweise, dass $\ker T = \mathrm{im}\tau$, d. h. $\ker T = \{\alpha \in L \,|\, \alpha = \sigma(\beta) - \beta$ für ein $\beta \in L\}$. (Hinweis: man untersuche $\dim\ker\tau$, $\dim\mathrm{im}\tau$ und $\dim\ker T$.)

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Sei $b \in K$ und sei L ein Zerfällungskörper von $f(x) = x^p - x - b \in K[x]$ über K. Sei $\alpha \in L$ mit $f(\alpha) = 0$.

(a) Man zeige, dass $f(\alpha + 1) = 0$.

(b) Man beweise, dass f über K zerfällt oder $f \in K[x]$ ist irreduzibel.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Seien K, L und f wie in Aufgabe 3. Angenommen $f \in K[x]$ ist irreduzibel.

(a) Man beweise, dass $[L : K] = p$ und dass L/K galoissch ist.

(b) Man beweise, dass $\mathrm{Gal}(L/K)$ eine zyklische Gruppe ist. Man gebe einen Erzeuger an.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Sei L/K eine Galoiserweiterung vom Grad p.

(a) Man beweise, dass $\mathrm{Gal}(L/K)$ zyklisch ist.

(b) Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}$. Man beweise, dass es ein $\alpha \in L$ gibt mit $b := \sigma(\alpha) - \alpha \in K$ und $b \neq 0$. (Hinweis: man verwende Aufgabe 2.)

(c) Man beweise, dass $L = K[\alpha]$ für ein $\alpha \in L$, dessen Minimalpolynom die Form $x^p - x - b$ für ein $b \in K$ hat.