

Übungen zur Algebra II

– Blatt 13 –

Abgabe bis Mittwoch, 14.07.2010, vor dem Tutorium

Aufgabe 1. (4 Punkte*)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man bestimme das Verschwindungsideal der irreduziblen Komponenten der affinen K -Varietät $\mathcal{V}(X_1^2 - X_2X_3, X_1X_3 - X_1)$ und beschreibe sie geometrisch.

Aufgabe 2. (4 Punkte*)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man bestimme das Verschwindungsideal der irreduziblen Komponenten der affinen K -Varietät $\mathcal{V}(X_1^2 - X_2X_3, X_1^3 - X_2^3)$ und beschreibe sie geometrisch.

Aufgabe 3. (4 Punkte*)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $V \subseteq A_K^m$ und $W \subseteq A_K^n$ zwei irreduzible K -Varietäten, wobei $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

(a) Man beweise, dass für jedes $v \in V$ die Menge $\{(v, w) \mid w \in W\}$ eine irreduzible K -Untervarietät von $V \times W$ ist.

(b) Man beweise, dass für jede irreduzible Komponente X von $V \times W$ die Menge $\{v \in V \mid \{v\} \times W \subseteq X\}$ entweder leer ist oder mit V übereinstimmt.

(c) Man beweise, dass $V \times W$ irreduzibel ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte*)

Man bestimme alle Ideale des Ringes $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Aufgabe 5. (4 Punkte*)

Man bestimme $\text{Spec } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

*) Die Punkte dieses Übungsblattes werden als Bonuspunkte gewertet.