Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. T. Bauer

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Algebraischen Geometrie

– Blatt 3 –

Abgabe Dienstag, 4.11.2008, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 7 (*Euler Formel*). (4 Punkte)
Beweisen Sie: Für homogene Polynome $F \in K[x_0, \ldots, x_n]$ vom Grad d gilt

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot x_i = d \cdot F \,.$$

Hier bezeichnet $\frac{\partial}{\partial x_i}$ die *formale Ableitung* nach der Unbestimmten x_i.

Aufgabe 8 (*Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Varietäten*). (4 Punkte)
Sei $X = V(F)$ eine Hyperfläche im $\mathbb{P}^n$ und $p \in X$. Zeigen Sie:

a) X ist in p genau dann singulär, wenn alle partiellen Ableitungen von F in p verschwinden, d.h.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \text{für alle } i = 0, \ldots, n \,.$$

b) Für den projektiven Tangentialraum gilt

$$\mathbb{T}_p X = V\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot x_i \right) \,.$$

(Hinweis: Euler-Formel)

Aufgabe 9 (*Ebene Kurven 1*). (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2,\ (x : y) \mapsto (x^2 : xy : y^2)$$

wohldefiniert ist und dass ihr Bild eine ebene projektive Kurve ist.

Aufgabe 10 (*Ebene Kurven 2*). (4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Jedes homogene Polynom $F \in K[x, y]$ ist ein Produkt von Linearfaktoren.
(Hinweis: Betrachten Sie im Fall $x \nmid F$ das Polynom $F(1, y)$.)

b) Für eine ebene Kurve $C \subset \mathbb{P}^2$ vom Grad d ist äquivalent:

(i) C hat einen Punkt p der Multiplizität d.

(ii) C ist die Vereinigung von d Geraden durch einen gemeinsamen Punkt p (mit Vielfachheiten gezählt).