Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

Funktionentheorie I

– Alternativklausur –

Freitag, 14.09.2007, 10:15-12:45 Uhr, HG Chemie, HS A

Name, Vorname ______________________

Matrikelnummer ______________________

Studiengang ______________________

Wichtig, bitte beachten:

- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern; zusätzliches Papier bei der Aufsicht.
- Der Schreibblock darf nicht auseinander genommen werden.
- Geben Sie stichpunktartig *Begründungen* für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
- Zugelassene Hilfsmittel: Merkblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	3	4	4	4	4	5	4	4	32
Erreicht									

Aufgabe 1 (3 Punkte). Es sei $u(x, y) := 2x^3 - 6xy^2 + e^y \cos x$. Bestimme alle Funktionen $v(x, y)$, so dass $f(x + iy) := u(x, y) + i\, v(x, y)$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorophe Funktion ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei γ eine geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurve in $\mathbb{C}$ mit $\pm i \notin S(\gamma)$. Bestimme *alle möglichen* Werte des Integrals

$$\int_\gamma \frac{dz}{1 + z^2}$$

durch Angabe geeigneter Kurven γ.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit der folgenden Eigenschaft:

($*$) Es existieren $M \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f(z)| \leq M\, |z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$.

Beweise:

a) f ist ein Polynom vom Grad $\leq n$.

b) Umgekehrt hat jedes Polynom vom Grade $\leq n$ die Eigenschaft ($*$).

Aufgabe 4 (4 Punkte). Bestimme die Laurent-Entwicklung von

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$$

um $2i$ auf $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z - 2i| < 4\}$ und $D_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_1$.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Sei $f : \overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_{\mathbb{B}}$ holomorph. Es gelte $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{B}$. Beweise:

a) $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \overline{\mathbb{B}}$,

b) f ist entweder konstant oder hat eine Nullstelle in $\mathbb{B}$.

Aufgabe 6 (5 Punkte). Bestimme für folgende Funktionen die Menge der isolierten Singularitäten, ihre Typen und die jeweiligen Residuen.

a) $\sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ b) $\frac{z^5}{1-z^3}$ c) $\exp\left(\frac{z}{1-z}\right)$

Aufgabe 7 (4 Punkte). Es sei

$$\gamma(t) := \begin{cases} t + i\, \sin t & , \ t \in [0, 3\pi) \\ \frac{3\pi}{2}\left(e^{-i(t-3\pi)} + 1\right) & , \ t \in [3\pi, 4\pi] \end{cases} .$$

Skizziere die Spur von γ und berechne

$$\int_\gamma \frac{1 + \sin z}{\cos z}\, dz$$

mit Hilfe des Residuenkalküls.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Berechne für $|\alpha| \neq 1$ das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\alpha \cos(t) + \alpha^2}$$

durch Integration von $\frac{1}{(z-\alpha)(z-\frac{1}{\alpha})}$ über $\partial\mathbb{B}$.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Es sei

$$u(x, y) := 2x^3 - 6xy^2 + e^y \cos x \, .$$

Bestimme alle Funktionen $v(x, y)$, so dass $f(x + iy) := u(x, y) + i\, v(x, y)$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorophe Funktion ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei γ eine geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurve in $\mathbb{C}$ mit $\pm i \notin S(\gamma)$. Bestimme *alle möglichen* Werte des Integrals

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$$

durch Angabe geeigneter Kurven γ.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit der folgenden Eigenschaft:

$(*)$ Es existieren $M \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f(z)| \leq M\,|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$.

Beweise:

a) f ist ein Polynom vom Grad $\leq n$.

b) Umgekehrt hat jedes Polynom vom Grade $\leq n$ die Eigenschaft $(*)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Bestimme die Laurent-Entwicklung von

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$$

um $2i$ auf $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - 2i| < 4\}$ und $D_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_1$.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Sei $f : \overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_{\mathbb{B}}$ holomorph. Es gelte $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{B}$. Beweise:

a) $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \overline{\mathbb{B}}$,

b) f ist entweder konstant oder hat eine Nullstelle in $\mathbb{B}$.

Aufgabe 6 (5 Punkte). Bestimme für folgende Funktionen die Menge der isolierten Singularitäten, ihre Typen und die jeweiligen Residuen.

a) $\sin\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ b) $\frac{z^5}{1-z^3}$ c) $\exp\left(\frac{z}{1-z}\right)$

Aufgabe 7 (4 Punkte). Es sei

$$\gamma(t) := \begin{cases} t + i\,\sin t & ,\ t \in [0, 3\pi) \\ \frac{3\pi}{2}\left(e^{-i(t-3\pi)} + 1\right) & ,\ t \in [3\pi, 4\pi] \end{cases} .$$

Skizziere die Spur von γ und berechne

$$\int_\gamma \frac{1 + \sin z}{\cos z}\, dz$$

mit Hilfe des Residuenkalküls.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Berechne für $|\alpha| \neq 1$ das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2}$$

durch Integration von $\frac{1}{(z-\alpha)(z-\frac{1}{\alpha})}$ über $\partial\mathbb{B}$.

Zusatzblatt

Zusatzblatt