Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 1 —

Abgabe: Mittwoch, den 25.4.2007, vor der Vorlesung.

(1) (4 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der Ring aller 2×2-Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen und dem Einselement $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Zeige, dass $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nicht kommutativ ist.

(ii) Zeige, dass $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kein Körper ist.

(iii) Beweise, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, definiert durch

$$\varphi(x+iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, ein injektiver Ring-Homomorphismus ist. Ist φ surjektiv?

(iv) Auf welche Weise folgt aus (iii), dass die Multiplikation in $\mathbb{C}$ assoziativ ist?

(2) (4 Punkte)

(i) Beschreibe mit der Notation von Aufgabe (1) die komplexe Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ in $\mathbb{C}$ durch die zugehörigen 2×2-Matrizen $\varphi(z)$.

(ii) Beweise, dass für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ die Matrix $\varphi(z) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar ist, d.h.

$$\varphi(z) \in GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \ A \text{ invertierbar}\},$$

und es gilt

$$\varphi(z^{-1}) = \varphi(z)^{-1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(iii) Zeige, dass $\varphi : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to GL_2(\mathbb{R})$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. Ist diese Abbildung surjektiv?

(3) (4 Punkte)
Sei $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ der Einheitskreis (1-Torus). Beweise

(i) $\mathbb{T}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(ii) $\varphi(\mathbb{T})$ ist eine Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$.

(iii) Beschreibe für $z \in \mathbb{T}$ die 2×2-Matrizen $\varphi(z)$ auf geometrische Weise.

(4) (4 Punkte)
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ heißt *normal*, falls $AA^t = A^tA$ gilt, wobei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Beweise: Die Matrizen $\varphi(z)$, für $z \in \mathbb{C}$, sind normal.