Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

Übungen zur Funktionentheorie I
— Blatt 2 —

Abgabe: Mittwoch, den 2.5.2007, vor der Vorlesung.

(1) (4 Punkte)
Beweise die Additionssätze

$$\begin{aligned} \sin(a+x) &= \sin(a)\ \cos(x) + \cos(a)\ \sin(x) \\ \cos(a+x) &= \cos(a)\ \cos(x) - \sin(a)\ \sin(x) \end{aligned}$$

für $a, x \in \mathbb{R}$ durch Betrachtung der Funktion

$$\begin{aligned} F(x) := {} & (\sin(a+x) - \sin(a)\ \cos(x) - \cos(a)\ \sin(x))^2 \\ & + (\cos(a+x) - \cos(a)\ \cos(x) + \sin(a)\ \sin(x))^2. \end{aligned}$$

Hinweis: Bestimme $F'(x)$ und $F(0)$.

(2) (4 Punkte)
Untersuche die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ auf die Eigenschaften offen/abgeschlossen/zusammenhängend/kompakt (mit Begründung).

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 \leq |z| \leq 2\}$
(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} :\ |z-i| < |z+i|\}$
(iii) $C = \{z \in \mathbb{C} :\ Re\, z \geq \frac{1}{2}\}$
(iv) $D = \{z \in \mathbb{C} :\ Im\,(z^2) = a\}$, $a \in \mathbb{R}$ (unterscheide $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$)

Stelle die Mengen graphisch dar.

(3) (4 Punkte)
Für $a, b \in \mathbb{R}$ definiere $e_{a,b} :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$e_{a,b}(x+iy) = e^{ax}\,[\cos(by) + i\ \sin(by)].$$

(i) Begründe, dass die Funktionen $e_{a,b}$ beliebig oft reell-differenzierbar auf $\mathbb{C}$ sind und bestimme

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\ \frac{\partial^n}{\partial y^n}\ e_{a,b}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für welche a, b ist $e_{a,b}$ komplex-differenzierbar, d.h. erfüllt die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen?

(4) (4 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend, und sei $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade (nicht notwendigerweise durch den Nullpunkt). Beweise mit Hilfe der Cauchy-Riemann Differentialgleichungen:
Jede komplex-differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $f(D) \subset L$ ist konstant.
(Hinweis: Untersuche zunächst Spezialfälle wie $L = \mathbb{R}$ oder $L = i\mathbb{R}$).