Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

Übungen zur Funktionentheorie I
— Blatt 3 —

Abgabe: Mittwoch, den 9.5.2007, vor der Vorlesung.

(1) (4 Punkte)
Beweise die Kettenregeln

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(z) &= \frac{\partial g}{\partial w}(f(z))\,\frac{\partial f}{\partial z}(z)+\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(z))\,\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z)\\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{\partial g}{\partial w}(f(z))\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)+\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(z))\,\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z)\end{aligned}$$

durch Zerlegung der Funktionen

$$\begin{aligned}f(x+iy) &= u(x,y)+iv(x,y)\\ g(u+iv) &= h(u,v)+ik(u,v)\end{aligned}$$

und Anwendung der "reellen" Kettenregel auf die vektorwertige Abbildung

$$(x,y)\mapsto (h(u(x,y),\ v(x,y)),\ \ k(u(x,y),\ v(x,y))).$$

(2) (4 Punkte)
Sei $\mathbb{R}_- := \{x\in\mathbb{R} | x\le 0\}$ und $U := \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

(i) Zeige, dass U ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend, ist. Ist U konvex? Ist U sternförmig bzgl. eines geeigneten Punktes $\sigma\in U$?

(ii) Für $k\in\mathbb{N},\ k\ge 2$, definiere den *Hauptzweig der k-ten Wurzel* $f_k : U\to\mathbb{C}$ durch

$$f_k(re^{it}) := \sqrt[k]{r}\ e^{it/k},$$

wobei $r>0$ und $-\pi<t<\pi$. Beweise: f_k ist $\mathbb{C}$-diffbar auf U, und bestimme die komplexe Ableitung $f_k'(z)$ für jedes $z\in U$.

(3) (4 Punkte)
Sei $U\subset\mathbb{C}$ offen und $f : U\to\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-diffbar.

(i) Beweise die Formel

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}(z)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z)$$

für alle $z\in U$, wobei $\overline{f} : U\to\mathbb{C}$ durch

$$\overline{f}(z) := \overline{f(z)}$$

definiert ist.

(ii) f heißt *antiholomorph*, falls $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ auf U gilt. Zeige, dass die antiholomorphen eine Unteralgebra von $\mathcal{D}(U,\mathbb{C})$ bilden.

(iii) Sei U ein Gebiet und $f : U\to\mathbb{C}$ sei holomorph (d.h. $\mathbb{C}$-diffbar) und antiholomorph. Zeige: f ist konstant.

(4) (4 Punkte)
Sei (E) eine der Eigenschaften

(i) konvex,
(ii) sternförmig,
(iii) zusammenhängend,

angewandt auf eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$. Für welche Eigenschaften (E) gilt dann:

(*) Besitzen $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ die Eigenschaft (E), dann hat auch $U_1 \cap U_2$ die Eigenschaft (E).
(**) Besitzen $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ die Eigenschaft (E) und gilt $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, dann hat auch $U_1 \cup U_2$ die Eigenschaft (E).

Gebe jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.