Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier Sommersemester 2007

Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 5 —

Abgabe: Mittwoch, den 23.5.2007, vor der Vorlesung.

(1) (4 Punkte)
Für $o \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei

$$L := \{o + tv : \; t \in \mathbb{R}, \; t \geq 0\}$$

die Halbgerade mit Endpunkt o in Richtung v.

(i) Konstruiere eine $\mathbb{C}$-diffbare Stammfunktion F auf $\mathbb{C} \setminus L$ von $\omega := \frac{dz}{z-o}$.

(ii) Beweise

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-o} = 0$$

für jede geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurve γ mit $S(\gamma) \cap L = \emptyset$.

(iii) Folgere

$$\int_{\partial B} \frac{dz}{z-o} = 0$$

für jede Kreisscheibe $B \subset \mathbb{C}$ mit $o \notin \overline{B}$.

(2) (4 Punkte)
Sei $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \; ad - bc \neq 0 \right\}$ die Gruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen.
Für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(z) := \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei im Fall $c \neq 0$ der Wert für $z = -\frac{d}{c}$ ausgenommen wird. Zeige:

(i) $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ ist eine $\mathbb{C}$-diffbare Funktion auf $\mathbb{C}$ bzw. auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$, falls $c \neq 0$ ist. Solche Funktionen heißen *Möbiustransformationen.*

(ii) Bestimme die Ableitung.

(iii) Für die Verkettung zweier Möbius-Transformationen gilt $[g_1] \circ [g_2] = [g_1 \, g_2]$, wobei $g_1 \, g_2$ das Matrizenprodukt von $g_1, g_2 \in GL_2(\mathbb{C})$ bezeichne.

(3) (4 Punkte)

a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet (bzgl. eines geeigneten Punktes $o \in U$). Beweise (analog zur Vorlesung): Eine stetige 1-Form $\omega = f\,dz + g\,d\overline{z}$ auf U ist integrabel genau dann, wenn

$$\int\limits_{\partial\Delta} \omega = 0$$

für alle abgeschlossenen Dreiecke $\Delta \subset U$ gilt.

b) Eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : I \to J$ zwischen zwei abgeschlossenen Intervallen $I = [a, b]$ und $J = [\alpha, \beta]$ heißt *Parametertransformation.* Beweise für eine $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : J \to U$ und eine stetige 1-Form ω auf U:

(i) $\ell(\gamma \circ \varphi) = \ell(\gamma)$ (Bogenlänge).

(ii) $\int\limits_{\gamma\circ\varphi} \omega = \pm \int\limits_{\gamma} \omega$. Wie bestimmt sich das Vorzeichen $\pm$?

(4) (4 Punkte)
Die spezielle Möbiustransformation

$$\varphi(z) = \frac{z-1}{z+1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}(z)$$

heißt *Cayley-Transformation.*

(i) Bestimme die inverse Abbildung φ^{-1}.

(ii) Beweise, dass φ die rechte Halbebene

$$D := \{z \in \mathbb{C} : \; Re\, z > 0\}$$

bijektiv auf die Einheitskreisscheibe

$$B := \{z \in \mathbb{C} : \; |z| < 1\}$$

abbildet (Ergänzung zu Aufgabe 2(ii), Blatt 4).

(iii) Konstruiere eine biholomorphe Abbildung

$$\psi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \underset{\approx}{\longrightarrow} B.$$

(Hinweis: Wurzelfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$).