Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

Übungen zur Funktionentheorie I
— Blatt 7 —

Abgabe: Mittwoch, den 6.6.2007, vor der Vorlesung.

(1) (4 Punkte)
Es seien $f : D \to \mathbb{C}^\times$ eine holomorphe Funktion (ohne Nullstellen) auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, γ eine geschlossene Kurve in D und

$$\operatorname{Ind}_\gamma(f) := \int_\gamma \frac{df}{f} .$$

(i) Schreibe $\operatorname{Ind}_\gamma(f)$ als Windungszahl eines Weges um $o = 0$.

(ii) Beweise
$$\operatorname{Ind}_\gamma(f_1 f_2) = \operatorname{Ind}_\gamma(f_1) + \operatorname{Ind}_\gamma(f_2)$$
für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C}^\times)$.

(2) (4 Punkte)
Beweise mit Hilfe des Satzes von Liouville:

(i) Seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^\times$. Dann gilt $f = g =$ konstant.

(ii) Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ mit $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist f konstant.
(*Hinweis*: Betrachte zunächst $g(z) := \exp\big(-f(z)\big)$.)

(iii) Folgere aus (ii): Ist $H \subset \mathbb{C}$ eine affine Halbebene, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ und $f(\mathbb{C}) \subset H$, so ist f konstant.

(3) (4 Punkte)
Seien $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen und ω die 1-Form $\omega := \frac{f'}{f}\, dz$. Zeige:

(i) ω besitzt eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$.

(ii) Es gibt eine ganze Funktion g mit $f = \exp \circ g$.
(*Hinweis*: Benutze ein ähnliches Argument wie bei der logarithmischen Liftung).

(4) (4 Punkte)
Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchy-Integralformel:

(i) $$\int_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{z^2\, dz}{(z+1)(z-1)^2}.$$

(ii) $$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}\, dz}{z^3(1-z)}.$$

(iii) $$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t)\, dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(Setze $\gamma(t) := e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$).