Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 8 —

Abgabe: Mittwoch, den 13.6.2007, vor der Vorlesung.

(1) (4 Punkte)
Eine 2-fach stetig diffbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt *harmonisch*, falls

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

auf D gilt.

(i) Beschreibe Δ durch $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

(ii) Beweise: Jede holomorphe Funktion f ist harmonisch, ebenso $\overline{f}$, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$.

(ii) Die Funktion $\ell(z) := \log |z|$ ist beliebig oft (reell) diffbar auf $\mathbb{C}^\times$. (Beweis!) Bestimme $\frac{\partial \ell}{\partial z}$, $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{z}}$. Ist ℓ holomorph bzw. harmonisch?

(2) (4 Punkte)
Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathbb{C})$, $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Es gelte

$$|f(z)|^2 \leq 1 - |z|^2 \qquad \forall\, z \in \mathbb{B}\,.$$

Beweise: $f = 0$.
Hinweis: Wende das Maximumprinzip für $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq r\}$ an, wobei $r < 1$ beliebig ist.

(3) (3 Punkte)
Folgere aus dem Identitätssatz: Für jedes Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist der Ring $\mathcal{O}(D, \mathbb{C})$ der holomorphen Funktionen nullteilerfrei, d.h. ein Integritätsring.

(4) (5 Punkte)
Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 2\pi\}$. Definiere $f : D \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} .$$

(i) Beweise: f ist holomorph auf D. (*Hinweis*: Betrachte $g(z) = 1/f(z)$.)

(ii) Betrachte die zugehörige Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n\, z^n.$$

Bestimme a_1 und zeige $a_{2m+1} = 0$ für $m \geq 1$.
(*Hinweis*: Zeige nach Berechnung von a_1, dass $f(z) - a_1 z$ eine gerade Funktion ist.)

(iii) Definiere die *Bernoulli-Zahlen*

$$B_m := m!\, a_m \qquad (m \geq 0)\,.$$

Beweise die Rekursionsformel

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \ldots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 2)\,.$$

unf folgere $B_m \in \mathbb{Q}$ für alle $m \geq 0$. (*Hinweis*: Betrachte $f(z) \cdot (e^z - 1)$.)