Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

Übungen zur Funktionentheorie I
— Blatt 10 —

Abgabe: Bis Dienstag, den 26.6.2007, 19 Uhr
direkt bei Benjamin Schwarz (A8707, LE).

(1) (4 Punkte)
Seien $D := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\}$ und $\log : D \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus.

(i) Bestimme für jedes $o \in D$ die Taylorreihe von log um o und ihren Konvergenzradius.

(ii) Definiere auf D für $\alpha \in \mathbb{C}$ die allgemeine *Potenzfunktion*

$$f_\alpha(z) := \exp\left[\alpha \log(z)\right].$$

Bestimme die Taylorreihe und den Konvergenzradius von f_α um $o := 1$ (optional: um jeden Punkt $o \in D$).
(*Hinweis*: Finde einen Zusammenhang zwischen f'_α und f_β für ein geeignetes β.)

(2) (4 Zusatzpunkte)
Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}$$

ist holomorph auf den Kreisringen

$$D_1 = \{0 < |z-1| < 1\}, \ D_2 = \{1 < |z-1| < 3\}, \ D_3 = \{|z-1| > 3\}.$$

Für jeden dieser Fälle bestimme die eindeutige Zerlegung

$$f(z) = f_+(z) - f_-(z) \quad (z \in D_{1,2,3})$$

durch Laurentreihen $f_\pm(z)$.

(3) (4 Punkte)
Bestimme die isolierten Singularitäten und deren Ordnung für die Funktionen

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+1}{z(z+2i)(z^2-3)}, \\ g(z) &= \frac{z^2+1}{(z^2+z+1)(z-1)^2}, \\ h(z) &= \frac{\log(1+z)}{z^2} \quad (|z|<1), \\ k(z) &= \frac{\sin(z)\ \cos(z)}{\cos(z)-\sin(z)}. \end{aligned}$$

(4) (4 Punkte)
Beweise die Formel

$$Res_o(f) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} \Big((z-o)^m f(z)\Big)\Big|_{z=o}$$

falls $\nu_o(f) = -m < 0$, und berechne damit die Residuen von

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^k(z-4)}, \qquad g(z) = \frac{\exp(z)}{z(z-1)^2}$$

an allen Singularitäten.