Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 12 —

Abgabe: Mittwoch, den 11.7.2007, vor der Vorlesung.

(1) (4 Punkte)
Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\,, \quad n \geq 1,\ a > 0$$

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx$$

(2) (4 Punkte)
Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

(i) $$\int_{0}^{\infty} \frac{x\,\sin(x)}{x^2+1}\,dx$$

(ii) $$\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2(x)}$$

(3) (4 Punkte)
Klassifiziere den Typ der isolierten Singularität $a = 0$ der folgenden Funktionen. Ist a hebbar, bestimme die holomorphe Fortsetzung. Ist a ein Pol, bestimme seine Ordnung.

(i) $\frac{1}{\cos z - 1}$, (ii) $\frac{z^2}{(\exp z - 1)^2}$, (iii) $\frac{1}{z} - \sin\frac{1}{z}$.

(4) (4 Punkte)
Sei $a \in U$ eine Polstelle von $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\},\ \mathbb{C})$.
Beweise: $\exp \circ f$ hat eine wesentliche Singularität in a.