Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2007

Funktionentheorie I

– Klausur –

Freitag, 20.07.2007, 12:15-14:45 Uhr, HG Chemie, HS A+B

Name, Vorname ______________________________

Matrikelnummer ______________________________

Studiengang ______________________________

Wichtig, bitte beachten:

- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern; zusätzliches Papier bei der Aufsicht.
- Der Schreibblock darf nicht auseinander genommen werden.
- Geben Sie stichpunktartig *Begründungen* für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
- Zugelassene Hilfsmittel: Merkblatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	3	5	3	4	4	4	4	4	31
Erreicht									

Aufgabe 1 (3 Punkte). Bestimme die Punkte $x + iy \in \mathbb{C}$, in denen

$$f(x+iy) = y^2 \sin x + i\, y$$

komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Es sei $\gamma(t) := (2 + \cos t)\, e^{2it}$, $t \in [0, 2\pi]$, eine Kurve in $\mathbb{C}$.

a) Skizziere die Spur von γ.

b) Berechne die Windungszahl $\operatorname{Ind}_0 \gamma$ explizit über ihre Definition.

c) Bestimme alle Windungszahlen geometrisch.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nicht konstant. Beweise, dass $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.
(*Hinweis:* Widerspruchsbeweis und Liouville)

Aufgabe 4 (4 Punkte). Seien $\mathbb{B} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $f, g : \overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, die auf $\mathbb{B}$ holomorph sind und für die gilt:

$$|f(z)| = |g(z)| \qquad \text{für alle} \quad |z| = 1\ .$$

Zeige: Haben f und g keine Nullstelle in $\overline{\mathbb{B}}$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, so dass

$$f(z) = \lambda\, g(z) \qquad \forall\, z \in \overline{\mathbb{B}}\ .$$

Aufgabe 5 (4 Punkte). Zeige, dass durch

$$f(z) := \sum_{n>0} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

eine auf $B_1(0)$ holomorphe Funktion f definiert wird, und bestimme die Ableitung $f'(0)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Bestimme die Laurentreihenentwicklung (um $o = 0$) der Funktion

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 5z + 4}\ ,$$

welche im Kreisring $1 < |z| < 4$ konvergiert.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Bestimme für folgende Funktionen die Menge der isolierten Singularitäten, ihre Typen und die jeweiligen Residuen.

a) $\frac{\log(1+z)}{z^3 - 5z^2 + 6z}$ mit $\log =$ Hauptzweig des Logarithmus

b) $\cos \frac{a}{z} + \sin \frac{b}{z}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$

Aufgabe 8 (4 Punkte). Bestimme das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2}\, dx\ , \qquad a > 0$$

mit Hilfe des Residuenkalküls.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Bestimme die Punkte $x + iy \in \mathbb{C}$, in denen

$$f(x + iy) = y^2 \sin x + i\, y$$

komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Es sei $\gamma(t) := (2 + \cos t)\, e^{2it}$, $t \in [0, 2\pi]$, eine Kurve in $\mathbb{C}$.

a) Skizziere die Spur von γ.

b) Berechne die Windungszahl $\operatorname{Ind}_0 \gamma$ explizit über ihre Definition.

c) Bestimme alle Windungszahlen geometrisch.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nicht konstant. Beweise, dass $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.
(*Hinweis:* Widerspruchsbeweis und Liouville)

Aufgabe 4 (4 Punkte). Seien $\mathbb{B} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $f, g : \overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, die auf $\mathbb{B}$ holomorph sind und für die gilt:

$$|f(z)| = |g(z)| \qquad \text{für alle} \quad |z| = 1 \, .$$

Zeige: Haben f und g keine Nullstelle in $\overline{\mathbb{B}}$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, so dass

$$f(z) = \lambda \, g(z) \qquad \forall \, z \in \overline{\mathbb{B}} \, .$$

Aufgabe 5 (4 Punkte). Zeige, dass durch

$$f(z) := \sum_{n>0} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

eine auf $B_1(0)$ holomorphe Funktion f definiert wird, und bestimme die Ableitung $f'(0)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Bestimme die Laurentreihenentwicklung (um $o = 0$) der Funktion

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 5z + 4} \ ,$$

welche im Kreisring $1 < |z| < 4$ konvergiert.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Bestimme für folgende Funktionen die Menge der isolierten Singularitäten, ihre Typen und die jeweiligen Residuen.

a) $\frac{\log(1+z)}{z^3-5z^2+6z}$ mit $\log =$ Hauptzweig des Logarithmus

b) $\cos\frac{a}{z} + \sin\frac{b}{z}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$

Aufgabe 8 (4 Punkte). Bestimme das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2}\, dx \;, \qquad a > 0$$

mit Hilfe des Residuenkalküls.

Zusatzblatt

Zusatzblatt