Notizen zur komplexen Differenzierbarkeit

von Benjamin Schwarz
8. Mai 2007

1 Definition komplexer Differenzierbarkeit

Zunächst erinnern wir an die verschiedenen (äquivalenten) Definitionen der Differenzierbarkeit einer reellen Funktion in einer Variablen.

Proposition 1.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt* in x_0 differenzierbar*, falls eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt:*

(i) Der Limes $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.

(ii) Es gibt eine in x_0 stetige Funktion $\Delta : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta(x)$$

gilt.

(iii) Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass die durch

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r(x)$$

definierte Restfunktion $r(x)$ folgenden Limes erfüllt: $\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{|x-x_0|} = 0$.

Die letzte Charakterisierung kann zudem in verschiedener Gestalt auftauchen. Löst man beispielsweise direkt nach der Restfunktion auf, so erhält man

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} \stackrel{!}{=} 0 \ .$$

Dies können wir wiederum über ein ϵ/δ-Kriterium formulieren: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)| < \epsilon|x - x_0| \ .$$

Usw.

Je nach verwendeter Charakterisierung definiert man nun die *Ableitung von f im Punkt x_0* als

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \Delta(x_0) = A(1) .$$

Beachte hierbei, dass die lineare Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Angabe von $f'(x_0) = A(1)$ eindeutig bestimmt ist, da $1 \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\mathbb{R}$ als reeler Vektorraum ist und $A(x) = A(x \cdot 1) = x \cdot A(1)$ gilt.

Gehen wir nun zu einer komplexen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ über, so können wir aufgrund der Körpereigenschaften von $\mathbb{C}$ dieselbe Definition für Differenzierbarkeit verwenden wie im reellen, eindimensionalen Fall - sofern wir $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen:

Definition 1.1. Eine komplexe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ *komplex differenzierbar*, falls eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt:

(i) Der Limes $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert.

(ii) Es gibt eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : U \to \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z)$$

gilt.

(iii) Es gibt eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass die durch

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + r(z)$$

definierte Restfunktion $r(z)$ folgenden Limes erfüllt: $\lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{|z-z_0|} = 0$.

Die Äquivalenz dieser Aussagen kann vollständig analog dem reellen Fall gezeigt werden, und nicht nur das: Auch die üblichen Rechenregeln wie Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel lassen sich analog beweisen. Außerdem folgt aus der komplexen Diffbarkeit in z_0 die Stetigkeit von f in z_0 wie im reellen Fall. Damit haben wir schon einen ausreichend großen Katalog an Methoden, um Ableitungen auszurechnen.

Beispiele

[1] $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$ ist komplex diffbar für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$, da

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} z + z_0 = 2z_0 ,$$

d.h. $f'(z_0) = 2z_0$.

[2] $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ ist in keinem Punkt z_0 komplex diffbar, da für $z_n := z_0 + \frac{1}{n}$ und für $\tilde{z}_n := z_0 + \frac{i}{n}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{i/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\tilde{z}_n) - f(z_0)}{\tilde{z}_n - z_0}\ ,$$

d.h. der Limes $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ kann nicht existieren.

2 Reelle vs. komplexe Differenzierbarkeit

Statt eine komplexe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ direkt über $\mathbb{C}$ zu betrachten können wir auch alternativ über den Vektorraumisomorphismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x+iy) \\ \operatorname{Im} f(x+iy) \end{pmatrix}$$

betrachten. Wie üblich schreiben wir $u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy)$ und $v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+iy)$, d.h.

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad \text{und} \qquad f_{\mathbb{R}}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}\ .$$

Zumindest für einen Moment wollen wir aber die Funktionen f und $f_{\mathbb{R}}$ voneinander unterscheiden, um die folgenden Methoden klar auseinander halten zu können.

Beispiele

[1] $f(z) = z^2$ ergibt $f_{\mathbb{R}}(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)$, also $u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = 2xy$.

[2] $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ ergibt $f_{\mathbb{R}}(x,y) = (x, 0)$, also $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = 0$.

Die Funktion $f_{\mathbb{R}}$ ist eine (reelle) Abbildung des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ in sich selbst. Zur Untersuchung einer solchen Abbildung können wir unser Wissen aus Analysis II anwenden. Insbesondere haben wir dort den Begriff der (reellen) Differenzierbarkeit definiert:

Definition 2.1. Eine (reelle) Funktion $f_{\mathbb{R}} : U \to \mathbb{R}^2$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ heißt in $p_0 \in U$ (reell) differenzierbar[1], falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, so dass die durch

$$f_{\mathbb{R}}(p) = f_{\mathbb{R}}(p_0) + A(p - p_0) + r(p)$$

definierte Restfunktion $r(p)$ folgenden Limes erfüllt: $\lim_{p\to p_0} \frac{r(p)}{\|p-p_0\|} = 0$.
Hierbei ist $\|\cdot\|$ eine Norm des $\mathbb{R}^2$ ist, meistens verwenden wir die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$.

[1]Wir verwenden hier die Bezeichung p für Punkte in $\mathbb{R}^2$, um nicht mit dessen Komponenten $p = (x,y)$ in Konflikt zu geraten.

Diese Definition verallgemeinert Prop.1.1*(iii)*. Analog ließe sich Prop.1.1*(ii)* verallgemeinern. Ein Ergebnis der Analysis II ist nun, dass die lineare Abbildung A bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ beschrieben wird durch eine (2×2)-Matrix, deren Einträge durch die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen bezüglich x und y gegeben sind, d.h.

$$A \equiv Df_{\mathbb{R}}(p_0) := \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad f_{\mathbb{R}}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} ,$$

wobei die partiellen Ableitungen im Punkt $p_0 = (x_0, y_0)^\top$ zu nehmen sind. Die Matrix $Df_{\mathbb{R}}(p_0)$ heißt *Jacobi-Matrix* von f im Punkt p_0.

Damit stellt sich die natürliche Frage, welcher Zusammenhang zwischen der *komplexen* Differenzierbarkeit von $f : U \to \mathbb{C}$ und der *reellen* Differenzierbarkeit von $f_{\mathbb{R}} : U \to \mathbb{R}^2$ besteht, und wie gegebenenfalls die Ableitung $f'(z_0)$ mit der Jacobischen $Df_{\mathbb{R}}(p_0)$ in $p_0 = (\operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0)^\top$ zusammenhängt.
Dass die beiden Begriffe nicht äquivalent sind, zeigt schon Beispiel **[2]**: $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ ist nicht komplex differenzierbar, aber $f_{\mathbb{R}}(x,y) = (x, 0)$ ist reell differenzierbar mit $Df_{\mathbb{R}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Aus dem Vergleich der Charakterisierung der komplexen Diffbarkeit über die Restfunktion (Def. 1.1*(iii)*) mit der Definition der reellen Diffbarkeit (Def. 2.1) erhält man folgendes Resultat.

Satz 2.1. *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ ist genau dann komplex differenzierbar in z_0, wenn $f_{\mathbb{R}}$ in $p_0 = (Re\, z_0, Im\, z_0)^\top$ reell differenzierbar ist und dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt:*

$$\partial_x u(p_0) = \partial_y v(p_0) \qquad \textit{und} \qquad \partial_y u(p_0) = -\partial_x v(p_0) ,$$

d.h. wenn die Jacobimatrix $Df(p_0)$ von der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ ist. In diesem Fall gilt

$$f'(z_0) = \partial_x u(p_0) + i\, \partial_x v(p_0) = \partial_y v(p_0) - i\, \partial_y u(p_0) .$$

Hintergrund für diesen Satz bildet das folgende Lemma, das reell-lineare Abbildungen mit komplex-linearen Abbildungen in Verbindung bringt. Hierbei identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit ihrer Matrixdarstellung bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$.

Lemma 2.1. *Eine reell-lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann komplex-linear, falls A bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ von der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ist.*

Beweis. Wir haben $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ identifiziert. Der einzige Unterschied zwischen reeller und komplexer Linearität liegt in dem Wertebereich für die skalare Multiplikation: Die Regel $A(\lambda z) = \lambda A(z)$ muss entweder für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ oder für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten. Die Skalarmultiplikation mit komplexen Skalaren ist über die gewöhnliche Multiplikation komplexer Zahlen erklärt:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha + i\beta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{pmatrix} .$$

Es genügt, $A(\lambda z) = \lambda A(z)$ für den Fall $\lambda = i$ zu prüfen, da dann der Rest aus der $\mathbb{R}$-Linearität folgt. Die Multiplikation mit i lässt sich auch über die Multiplikation mit der Matrix $I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ beschreiben, denn

$$I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Damit bleibt zu prüfen, wann $AI(z) = IA(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gilt, d.h. wann $AI = IA$ gilt (A kommutiert mit I). Die Rechnung ergibt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

d.h. $a = d$ und $b = -c$. Somit ist $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genau dann auch $\mathbb{C}$-linear, falls die Matrixdarstellung von A die angegeben Form hat. $\square$

Geometrische Interpretation: Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, deren Matrixdarstellung von der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ ist, nennt man eine *Drehstreckung*, falls $\det A = a^2 + b^2 \neq 0$ ist. Definieren wir nämlich $s := \sqrt{a^2 + b^2}$, so ist $\frac{1}{s} \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ eine orthogonale Matrix. Damit gibt es einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass

$$A = s \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} ,$$

A beschreibt eine Drehung um den Winkel φ und ein Streckung um den Faktor s.

Sei nun eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ in einem Punkt z_0 komplex diffbar, so ist die Jacobi-Matrix $Df_{\mathbb{R}}(p_0)$ der zugehörigen reellen Abbildung $f_{\mathbb{R}} : U \to \mathbb{R}^2$ im Punkt $p_0 \equiv z_0$ nach Satz 2.1 eine Drehstreckung. Da nun die Jacobi-Matrix $Df(p_0)$ bzw. die zugehörige affin-lineare Abbildung $\big(p \mapsto f(p_0) + Df(p_0)(p - p_0)\big)$ die best mögliche lineare Approximation der Abbildung $f_{\mathbb{R}}$ im Punkt p_0 darstellt, können wir sagen, dass $f_{\mathbb{R}}$ (und also f) *lokal* eine Drehstreckung ist.

Beispiele

[1] $f(z) = z^2$, also $f_{\mathbb{R}}(x, y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)$ und $Df_{\mathbb{R}} = \left(\begin{smallmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{smallmatrix}\right)$, d.h. wie im ersten Abschnitt schon gezeigt ist f in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex diffbar.

[2] $f(z) = \bar{z}$, also $f_{\mathbb{R}}(x, y) = (x,\ -y)$ und $Df_{\mathbb{R}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, d.h. f ist in keinem Punkt komplex diffbar.

3 Wirtinger-Kalkül

Der Wirtinger-Kalkül stellt eine (geschickte) Umformulierung der bisherigen Definition der komplexen Differenzierbarkeit dar. Hierbei wird die strikte Trennung zwischen f und

$f_{\mathbb{R}}$ aufgeweicht und die reellen Ableitungen direkt auf f angewendet. Wir definieren für $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

bzw. kurz $\partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v$ und $\partial_y f = \partial_y u + i\partial_y v$. Die *Wirtinger-Ableitungen* von f sind dann durch

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{2}$$

definiert, bzw. in kurzer Schreibweise $\partial_z f = \frac{1}{2}\left(\partial_x f - i\,\partial_y f\right)$ und $\partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}\left(\partial_x f + i\,\partial_y f\right)$. Die Wirtinger-Ableitungen können von jeder komplexen Funktion f genommen werden, deren Komponentenfunktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ reell partiell differenzierbar sind. Ihre Definition wird durch den folgenden Satz motiviert.

Satz 3.1. *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist in z_0 genau dann reell differenzierbar, wenn es in z_0 stetige Funktionen Δ_1 und Δ_2 gibt, so dass für alle $z \in U$*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta_1(z) + (\overline{z} - \overline{z}_0)\Delta_2(z)$$

gilt. Dann ist $\Delta_1(z_0) = \partial_z f(z_0)$ und $\Delta_2(z_0) = \partial_{\overline{z}} f(z_0)$.

Für den Beweis verwendet man die verallgemeinerte Version von Prop.1.1*(ii)* zur Charakterisierung der reellen Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^2$. Siehe z.B. [Fischer/Lieb, Funktionentheorie].

Durch den Vergleich mit Definition 1.1*(ii)* erhalten wir unmittelbar das Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit:

Korollar 3.1. *Eine reell differnzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist in z_0 genau dann komplex differenzierbar, wenn $\partial_{\overline{z}} f(z_0) = 0$ gilt.*

Den Zusammenhang mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erhalten wir, wenn wir die Wirtinger-Ableitungen $\partial_z f$ und $\partial_z f$ über die Komponentenfunktionen u und v ausdrücken. Wir setzen (1) in (2) ein und erhalten:

$$\partial_z f = \frac{1}{2}\big(\partial_x u + \partial_y v\big) + \frac{i}{2}\big(\partial_x v - \partial_y u\big) \quad \text{und} \quad \partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}\big(\partial_x u - \partial_y v\big) + \frac{i}{2}\big(\partial_x v + \partial_y u\big)\ .$$

Damit ist $\partial_{\overline{z}} f = 0$ genau dann, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind; in diesem Fall folgt

$$\partial_z f(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) - i\partial_y u(x_0, y_0) = f'(z_0)\ ,$$

d.h. die Notation $\partial_z f$ stimmt auch hier mit der aus Analysis I/II gewohnten Notation für Ableitungen überein.