Transformation der Cauchy-Riemann-DGLen

von Benjamin Schwarz
14. Mai 2007

1 Transformationsformel

Für gewöhnlich werden die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für eine Abbildung $f: U \to \mathbb{R}^2$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standard-Koordinaten des $\mathbb{R}^2$ angegeben,

$$\partial_x u = \partial_y v \quad , \quad \partial_y u = -\partial_x v \qquad \text{mit} \qquad f(x,y) = \big(u(x,y),\, v(x,y)\big) \; .$$

In einigen Fällen ist es aber günstiger, andere Koordinaten zu verwenden, da die betrachtete Funktion hierin eine „einfachere Gestalt“ annimmt. Der Hauptzweig der k-ten Wurzelfunktion ist hierfür ein Beispiel:

$$f_k : U \to \mathbb{C},\; z = re^{it} \mapsto \sqrt[k]{r}\, e^{i\frac{t}{k}} = \big(\sqrt[k]{r}\, \cos \frac{t}{k},\, \sqrt[k]{r}\, \sin \frac{t}{k}\big)$$

mit $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $t \in (-\pi, \pi)$. Führen wir in diesem Fall Polarkoordinaten

$$\varphi : U' \to U,\; (r,\, t) \mapsto (r\cos t,\, r \sin t) \quad \text{mit} \quad U' = \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi,\, \pi)$$

ein, so können wir statt f_k nun $g_k := f_k \circ \varphi$, d.h.

$$g_k : U' \to \mathbb{C},\; (r,t) \mapsto \big(\sqrt[k]{r}\, \cos \frac{t}{k},\, \sqrt[k]{r}\, \sin \frac{t}{k}\big) \; ,$$

betrachten, was der Definition von f_k eher angemessen ist. In diesem Schritt haben wir dem Urbildraum neue Koordinaten gegeben.
Da das Bild von g_k ebenfalls in U enthalten ist, können wir auch für das Bild Polarkoordinaten verwenden. Dann betrachten wir $h_k := \varphi^{-1} \circ f_k \circ \varphi$, d.h.

$$h_k : U' \to U',\; (r,t) \mapsto \big(\sqrt[k]{r},\, \frac{t}{k}\big) \; .$$

Diese Darstellung des Hauptzweigs der k-ten Wurzelfunktion ist offensichtlich wesentlich einfacher als die ursprüngliche.

Es stellt sich nun jedoch die Frage, wie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in diesen Koordinaten ausgedrückt werden können, um die gegebene Funktion auf Holomorphie zu testen.

Zur Klärung dieser Frage betrachten wir folgende Situation: Seien U, U', V, $V' \subset \mathbb{R}^2$ offene Mengen, $f : U \to \mathbb{R}^2$ eine reell differenzierbare Funktion mit $f(U) \subset V$ und $\varphi : U' \to U$, $\psi : V' \to V$ Diffeomorphismen. Dann definiert $g := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ eine neue reell differenzierbare Funktion.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \\ U' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "g"'] & V' \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Die entscheidende Idee für die Transformation der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen liegt darin, die Gleichungen als spezielle Eigenschaft des Differentials von f zu betrachten.

Lemma 1.1. *Eine reell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$ erfüllt genau dann die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in $p \in U$, wenn das Differential $Df\big|_p$ folgende Relation erfüllt*

$$Df\big|_p \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Df\big|_p \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Äquivalent hierzu ist die Forderung, dass $Df\big|_p$ mit der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ kommutiert, was wiederum bedeutet, dass $Df\big|_p$ nicht nur reell- sondern auch komplex-linear ist. Dieses stellt aber gerade die ursprüngliche Motivation für die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen dar.[1]

Mit dieser Überlegung können wir nun das Ergebnis formulieren.

Satz 1.1. *Die Abbildung f erfüllt genau dann die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in $p \in U$, wenn das Differential von g in $q := \varphi^{-1}(p)$ folgende Relation erfüllt:*

$$Dg\big|_q \stackrel{!}{=} S_q^{-1}\, Dg\big|_q\, T_q \, , \tag{1}$$

wobei

$$S_q := D\psi\big|_{g(q)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D\psi\big|_{g(q)} \quad \textit{und} \quad T_q := D\varphi\big|_q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D\varphi\big|_q \, .$$

Wir nennen (1) transformierte Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen*.*

Berechnet man in konkreten Beispielen linke und rechte Seite von (1), so erhält man ähnlich den gewöhnlichen Cauchy-Riemann-Gleichungen Relationen zwischen den partiellen Ableitungen von g (siehe Abschnitt 2).

[1] Genaueres siehe „Notizen zur komplexen Differenzierbarkeit“.

Beweis. Wir setzen voraus, dass f in p die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt und folgern Relation (1). Die Umkehrung kann analog gezeigt werden.
Zunächst bestimmen wir das Differential von g im Punkt $q = \varphi^{-1}(p)$ mit Hilfe der Kettenregel:

$$\begin{aligned} Dg\big|_q &= D\psi^{-1}\big|_{f(\varphi(q))}\, Df\big|_{\varphi(q)}\, D\varphi\big|_q \\ &= D\psi\big|^{-1}_{\psi\circ f(\varphi(q))}\, Df\big|_p\, D\varphi\big|_q \\ &= D\psi\big|^{-1}_{g(q)}\, Df\big|_p\, D\varphi\big|_q\ . \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die rechte Seite von (1) ein (beachte S_q^{-1} statt S_q), so erhalten wir

$$\begin{aligned} S_q^{-1}\, Dg\big|_q\, T_q &= D\psi\big|^{-1}_{g(q)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Df\big|_p \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D\varphi\big|_q \\ &= D\psi\big|^{-1}_{g(q)}\, Df\big|_p\, D\varphi\big|_q \\ &= Dg\big|_q\ , \end{aligned}$$

wobei wir Lemma 1.1 verwendet haben. □

Bemerkung 1.1. Gilt $f(U) \subset U$, so können wir sowohl für den Urbild- als auch den Bildbereich dieselbe Koordinatentransformation φ verwenden. In diesem Fall sind T_q und S_q formal identisch, es ist jedoch zu beachten, dass T_q im Punkt q und S_q im Punkt $g(q)$ ausgewertet werden, d.h. es gilt $S_q = T_{g(q)}$.

Bemerkung 1.2. Verwenden wir für den Bildbereich (bzw. für den Urbildbereich) keine Koordinatentransformation, d.h. setzen wir $\psi = \mathrm{id}$ (bzw. $\varphi = \mathrm{id}$), so folgt $S_q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (bzw. $T_q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$). Im Spezialfall gar keiner Transformation erhalten wir wie erwartet die Relation von Lemma 1.1.

2 Beispiele

Wir beschränken uns hier auf die Diskussion von Polarkoordinaten. Diese führen wir zunächst nur im Urbildbereich ein, und anschließend auch im Bildbereich.

2.1 Polarkoordinaten im Urbildbereich

Wie im ersten Abschnitt schon erwähnt werden Polarkoordinaten über die folgende Abbildung beschrieben

$$\varphi : U' \to U,\ (r,\, t) \mapsto (r\cos t,\, r\sin t) \quad \text{mit} \quad U' = \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi,\, \pi)\ .$$

Hierbei müssen wir im Bildbereich die Ebene $\mathbb{R}^2$ auf die geschlitzte Ebene $U := \mathbb{R}^2 \setminus \big(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}\big)$ einschränken, um einen Diffeomorphismus zu erhalten. Es gilt

$$D\varphi(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \det D\varphi(r,t) = r\ ,$$

d.h. für $r \neq 0$ ist φ ein lokaler Diffeomorphismus, der durch die Einschränkung auf U (Bijektivität!) auch global diffeomorph ist.
Da wir im Bildbereich keine Transformation verwenden, setzen wir $\Psi = \mathrm{id}$ und erhalten $S_q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Für die Transformation φ errechnen wir für $q = (r,t)$

$$\begin{aligned} T_q &= D\varphi\big|_q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D\varphi\big|_q \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos t & r\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{2}$$

Betrachten wir nun die Abbildung $g := f \circ \varphi$, d.h. $g : U' \to \mathbb{R}^2,\ (r,t) \mapsto \big(u(r,t),\, v(r,t)\big)$, wobei wir verkürzend $u(r,t) := u \circ \varphi(r,t)$ und $v(r,t) := v \circ \varphi(r,t)$ schreiben, was in der Anwendung in der Regel nicht zu Schwierigkeiten führt, da die ursprünglich karthesischen Koordinaten mit x und y bezeichnet werden.
Damit erhalten wir als transformierte Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

$$Dg\big|_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Dg\big|_q \begin{pmatrix} 0 & -r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} ,$$

d.h.

$$Dg\big|_q = \begin{pmatrix} \partial_r u & \partial_t u \\ \partial_r v & \partial_t v \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r u & \partial_t u \\ \partial_r v & \partial_t v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_t v & -r\partial_r v \\ -\frac{1}{r}\partial_t u & r\partial_r u \end{pmatrix} ,$$

d.h.

$$\boxed{\partial_r u = \frac{1}{r}\,\partial_t v \quad \text{und} \quad \partial_t u = -r\,\partial_r v} \quad . \tag{3}$$

In diesem Fall hat das Differential von g z.B. die folgende Gestalt:

$$Dg\big|_{(r,t)} = \begin{pmatrix} \partial_r u & -r\,\partial_r v \\ \partial_r v & r\,\partial_r u \end{pmatrix} .$$

Außerdem können wir über die Identifikation von $z = x + iy$ mit $\equiv \left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$ die Ableitung $f'(z)$ über die partiellen Ableitungen von g in einer einfachen Formel ausdrücken.

Für $z = r\,e^{it} = \varphi^{-1}(r,t)$ gilt

$$\begin{aligned}
f'(z) &\equiv Df\big|_z = D\big(g\circ\varphi^{-1}\big)\big|_z = Dg\big|_{(r,t)}\,D\varphi\big|_{(r,t)}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix}\partial_r u & -r\,\partial_r v\\ \partial_r v & r\,\partial_r u\end{pmatrix}\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos t & r\sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos t\,\partial_r u + \sin t\,\partial_r v & \sin t\,\partial_r u - \cos t\,\partial_r v\\ \cos t\,\partial_r v - \sin t\,\partial_r u & \sin t\,\partial_r u + \cos t\,\partial_r v\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_r u & -\partial_r v\\ \partial_r v & \partial_r u\end{pmatrix}\\
&\equiv e^{-it}\,\big(\partial_r u + i\,\partial_r v\big)
\end{aligned}$$

Definieren wir naheliegender Weise $\partial_r g := \partial_r u + i\partial_r v$, so gilt folglich

$$\boxed{f'(z) = e^{-it}\,\partial_r g} \quad . \tag{4}$$

Beispiel. Wir prüfen den Hauptzweig der k-ten Wurzelfunktion f_k auf Holomorphie, indem wir die Transformierte $g_k := f_k\circ\varphi$, d.h.

$$g_k : U' \to \mathbb{C},\ (r,t)\mapsto \big(\sqrt[k]{r}\,\cos\frac{t}{k},\,\sqrt[k]{r}\,\sin\frac{t}{k}\big)\ ,$$

untersuchen. Es ist $u_k(r,t) = \sqrt[k]{r}\,\cos\frac{t}{k}$ und $v_k(r,t) = \sqrt[k]{r}\,\sin\frac{t}{k}$, und die partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\partial_r u_k &= \frac{1}{k}\,r^{\frac{1}{k}-1}\,\cos\tfrac{t}{k} & \qquad \partial_t u_k &= -\frac{1}{k}\,r^{\frac{1}{k}}\,\sin\tfrac{t}{k}\\
\partial_r v_k &= \frac{1}{k}\,r^{\frac{1}{k}-1}\,\sin\tfrac{t}{k} & \qquad \partial_t v_k &= \frac{1}{k}\,r^{\frac{1}{k}}\,\cos\tfrac{t}{k}
\end{aligned}$$

Damit ist leicht zu prüfen, dass die transformierten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (3) erfüllt sind, d.h. der Hauptzweig der k-ten Wurzelfunktion ist eine auf U holomorphe Abbildung. Für die Ableitung in $z = r\,e^{it}$ gilt

$$f_k'(z) = e^{-it}\left(\frac{1}{k}\,r^{\frac{1}{k}-1}\,\cos\tfrac{t}{k} + i\,\frac{1}{k}\,r^{\frac{1}{k}-1}\,\sin\tfrac{t}{k}\right) = \frac{1}{k}\,r^{\frac{1}{k}-1}\,e^{it\left(\frac{1}{k}-1\right)}\ .$$

2.2 Polarkoordinaten in Urbild- und Bildbereich

Verwenden wir nun sowohl für den Urbild- als auch für den Bildbereich Polarkooridinaten, so ist $g = \varphi^{-1}\circ f\circ\varphi$ eine Abbildung

$$g : U' \to U',\ (r,t)\mapsto \big(R(r,t),\,T(r,t)\big)\ .$$

Nach Bemerkung 1.1 gilt für die Transformationsmatrizen $S_q = T_{g(q)}$, d.h. nach Rechnung (2) des vorigen Abschnitts erhalten wir

$$T_{(r,t)} = \begin{pmatrix}0 & -r\\ \frac{1}{r} & 0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_{(r,t)} = \begin{pmatrix}0 & -R(r,t)\\ \frac{1}{R(r,t)} & 0\end{pmatrix}\ ,$$

und somit

$$Dg\big|_{(r,t)} = \begin{pmatrix} \partial_r R & \partial_t R \\ \partial_r T & \partial_t T \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & R \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r R & \partial_t R \\ \partial_r T & \partial_t T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{R}{r}\,\partial_t T & -rR\,\partial_r T \\ -\frac{1}{rR}\,\partial_t R & \frac{r}{R}\,\partial_r R \end{pmatrix} .$$

Die transformierten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten nun

$$\boxed{\partial_r R = \frac{R}{r}\,\partial_t T \quad \text{und} \quad \partial_t R = -rR\,\partial_r T} \quad . \tag{5}$$

Für die Ableitung $f'(z) = f'(re^{it})$ erhalten wir in diesem Fall aus dem Vergleich mit (4) wegen $u(r,t) = R(r,t)\,\cos T(r,t)$ und $v(r,t) = R(r,t)\,\sin T(r,t)$

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-it}\,\big(\partial_r u + i\,\partial_r v\big) \\ &= e^{-it}\,\big((\partial_r R)\,\cos T - R\,\sin T\,\partial_r T + i\,(\partial_r R)\,\sin T + i\,R\,\sin T\,\partial_r T\big) \\ &= e^{-it}\,\partial_r R\,\big(\cos T + i\sin T\big) + i\,e^{-it}\,R\,\partial_r T\,\big(\cos T + i\sin T\big) \\ &= e^{i(T-t)}\,\big(\partial_r R + iR\,\partial_r T\big)\ , \end{aligned}$$

also

$$\boxed{f'(z) = e^{i(T-t)}\,\big(\partial_r R + iR\,\partial_r T\big)} \quad . \tag{6}$$

Beispiel. Prüfen wir erneutden Hauptzweig der k-ten Wurzelfunktion auf Holomorphie, diesmal durch Betrachtung der Funktion $g_k = \varphi^{-1} \circ f_k \circ \varphi$, d.h.

$$g_k : U' \to U',\ (r,t) \mapsto \big(\sqrt[k]{r}, \frac{t}{k}\big)\ .$$

Es sind $R_k(r,t) = \sqrt[k]{r}$ und $T_k(r,t) = \frac{t}{k}$, und die partiellen Ableitungen vereinfachen sich zu

$$\partial_r R_k = \frac{1}{k}\,r^{\frac{1}{k}-1} \qquad \partial_t R_k = 0$$

$$\partial_r T_k = 0 \qquad \partial_t T_k = \frac{1}{k}$$

Einsetzen in (5) zeigt erneut die Holomorphie von f_k, und als Ableitung $f'(z)$ erhalten wir ebenfalls

$$f'(z) = e^{i(T-t)}\,\big(\partial_r R + iR\,\partial_r T\big) = e^{i\left(\frac{t}{k}-t\right)}\,\big(\frac{1}{k}\,r^{\frac{1}{k}-1} + 0\big) = \frac{1}{k}\,r^{\frac{1}{k}-1}\,e^{it\left(\frac{1}{k}-1\right)}\ .$$