Skript zur Vorlesung

Funktionentheorie I

Marburg, Sommersemester 2000

H.Upmeier

Satz: Daniel Soll, Korrektur: Stefan Reutemann

Vorwort von Volker Scheidemann (Assistent)

In der Funktionentheorie I beschäftigt man sich mit komplex-differenzierbaren bzw. holomorphen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Im Gegensatz zur Differentialrechnung einer reellen Variablen ist die Klasse der holomorphen Funktionen einer komplexen Veränderlichen vergleichsweise eng. Es handelt sich hierbei genau um die Funktionen, die auf ihrem Definitionsbereich lokal stets durch ihre (komplexe) Taylorreihe dargestellt werden. Dazu gehören z.B. die komplexen Polynome, die Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus, aber auch kompliziertere Funktionen wie die Gamma- oder die Riemannsche Zetafunktion. Die wohl beherrschenden Sätze für die Funktionentheorie I sind der Cauchysche Integralsatz und die daraus resultierende Cauchysche Integralformel bzw. , als Verallgemeinerung hiervon, der Residuensatz.

Die Funktionentheorie hat Anwendungen in vielen Zweigen der Mathematik, u.a. in der Zahlentheorie, der Spektraltheorie oder der Theorie der harmonischen Funktionen und in der Physik (z.B. in der Strömungslehre) . Auch lassen sich viele Phänomene der reellen Analysis erst beim Blick aufs Komplexe richtig erklären.

Besonders faszinierend ist die Eleganz vieler funktionentheoretischer Beweise. So lässt sich beispielsweise der berühmte Fundamentalsatz der Algebra, dass jedes komplexe Polynom positiven Grades eine Nullstelle besitzt und dessen Originalbeweis im Jahre 1799 immerhin C.F. Gauß zur Promotion verhalf, mit Hilfe eines Satzes der Funktionentheorie (Satz von Liouville) in wenigen Zeilen beweisen. Die Bedeutung der Funktionentheorie innerhalb der Mathematik lässt sich allein schon an den Namen derjenigen ablesen, die die Funktionentheorie entscheidend geprägt haben. Neben Gauß, der mit der Einführung der komplexen Zahlenebene die Grundlage für alles weitere schuf, sind insbesondere die Namen K. Weierstraß, A.L. Cauchy und B. Riemann zu nennen. Der Inhalt der Riemannschen Habilitation, der Riemannsche Abbildungssatz, der besagt, dass sich genau die einfach zusammenhängenden Gebiete in C biholomorph, also orientierungs- und winkeltreu auf die Einheitskreisscheibe abbilden lassen, bildet einen Höhepunkt der Vorlesung. In ihm laufen praktisch alle Resultate der Vorlesung zusammen. Wenn man bedenkt, wie kompliziert einfach zusammenhängende Gebiete aussehen können, kann man allein vor der Entdeckung dieses Satzes nur den Hut ziehen, ganz zu schweigen von seinem Beweis. Beispielsweise ist das berühmte Apfelmännchen mit seiner fraktalen Geometrie einfach zusammenhängend.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen der Funktionentheorie

1.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Definition 1.1.1. *Eine Menge K mit Verknüpfungen*

$$+: \quad K \times K \longrightarrow K$$

und

$$\cdot: \quad K \times K \longrightarrow K$$

heisst Körper

$\Longleftrightarrow$

1. $(K, +, 0)$ *abelsche Gruppe*
2. $(K, +, \cdot, 1)$ *assoziativer, unitaler Ring, d.h.*
   (a) $(K, \cdot)$ *assoziativ*
   (b) *es existiert* $1 \in K$
   (c) $(K, +, \cdot)$ *ist distributiv*
3. *Der Ring K ist kommutativ*
4. $K \backslash \{0\} =: K^{\times}$ *ist abelsche Gruppe bzgl.* $\cdot$

Beispiel 1.1.2. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ *abelsche Gruppe,* $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$ *kommutativer Ring, kein Körper*

Beispiel 1.1.3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *Körper,* $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *Körper,* $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$

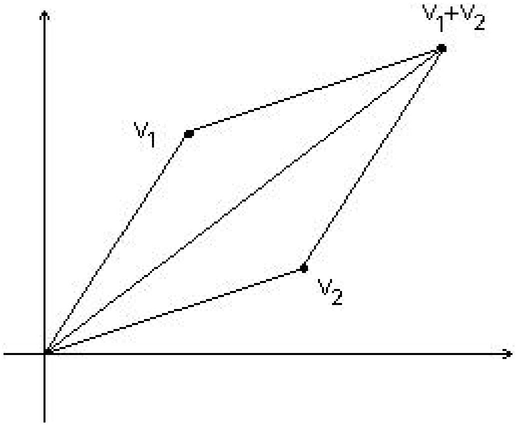
Beispiel 1.1.4. $\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ *Ring der* 2×2*-Matrizen bzgl. komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation, ist assoziativ und unital (Einheitsmatrix), aber* <u>*nicht*</u> *kommutativ, also kein Körper.*

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ *falls* $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$

Ziel ist nun die Definition einer Körperstruktur auf $\mathbb{R}^2$:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

liefert offensichtlich eine abelsche Gruppe $(\mathbb{R}^2, +)$



Die analoge Definition der Multiplikation:

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$$

liefert allerdings keinen Körper, da $(0, 1)$ kein Inverses hat.

Deshalb definiert man

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Satz 1.1.5. *Mit der Addition und Multiplikation wie oben wird* $\mathbb{R}^2$ *zu einem Körper, genannt Körper der komplexen Zahlen* $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

Beweis :

1. $(\mathbb{C}, +, 0) = (\mathbb{R}^2, +, (0, 0))$ abelsche Gruppe, da $\mathbb{R}^2$ Vektorraum.
2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist assoziativer, unitaler Ring:

   $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \varphi(z) := \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

   Beh.: $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist Homomorphismus von Ringen, injektiv

φ injektiv: Kern $\varphi = (0,0)$
φ Ringhomomorphismus:
zz : $\varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2) = \varphi(z_1 \cdot z_2) \Longleftrightarrow \varphi(x_1, y_1)\varphi(x_2, y_2) = \varphi(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$
Bew.: $\varphi(z_1)\varphi(z_2) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ -y_1x_2 - x_1y_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$
Also ist φ Homomorphismus

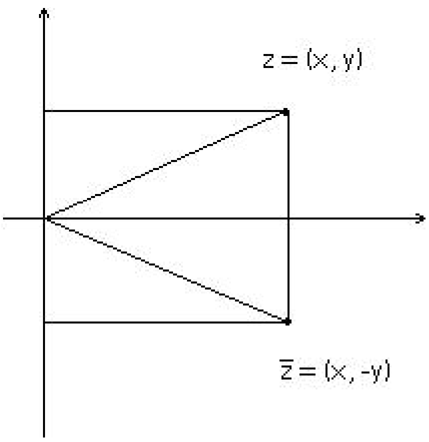
Die Behauptung folgt, da $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \varphi(\mathbb{C})$ ein Isomorphismus von Ringen ist und $\varphi(\mathbb{C})$ ein assoziativer unitaler Ring.

3. $\mathbb{C}$ kommutativer Ring, da $zw = wz$ obwohl $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nicht kommutativ:
Bew.: $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, d.h. $\varphi(\mathbb{C})$ kommutativer Unterring.

4. $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ Gruppe:

komplexe Konjugation: $z = (x, y) \in \mathbb{C}, \overline{z} := (x, -y)$
Beh.: $z \mapsto \overline{z}$ Involution von $\mathbb{C}$, d.h.

$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
und $\overline{\overline{z}} = z$



Bew.:
$\varphi(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, $\varphi(\overline{z}) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \varphi(z)^t$
Da $(AB)^t = B^tA^t$ und φ Homomorphismus, folgt
$\overline{zw} = \overline{wz}$
Sei $z = (x, y) \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $(x, y) \neq (0,0) \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$
$z^{-1} := \frac{\overline{z}}{x^2+y^2} = \frac{(x,-y)}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \Longrightarrow zz^{-1} = (1,0) = z^{-1}z$, also $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ Gruppe.
Insgesamt: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ Körper

□

Proposition 1.1.6. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *Unterkörper*

Beweis : $x \mapsto (x, 0)$ ist Isomorphismus von Körpern. Spezialfall: $\mathbb{R} \ni 1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ $\square$

Definition 1.1.7. $i := (0, 1) \Longrightarrow i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$
weiter gilt:
$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x1 + yi = x + iy$

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat eindeutige Darstellung der Form $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, definiere also: $x := Re\, z$, $y := Im\, z$

Proposition 1.1.8. $Re\, z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $Im\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

Beweis : Sei $z = (x, y) \Longrightarrow \overline{z} = (x, -y) \Longrightarrow z + \overline{z} = (x, y) + (x, -y) = (2x, 0) = 2x$
$\Longrightarrow Re\, z = x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
$z - \overline{z} = (x, y) - (x, -y) = (0, 2y) = 2y(0, 1) = 2yi$
$\Longrightarrow Im\, z = y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ $\square$

Definition 1.1.9. $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$

Proposition 1.1.10. *1.* $|zw| = |z| \cdot |w|$

2. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Δ-Ungleichung)*

Beweis :

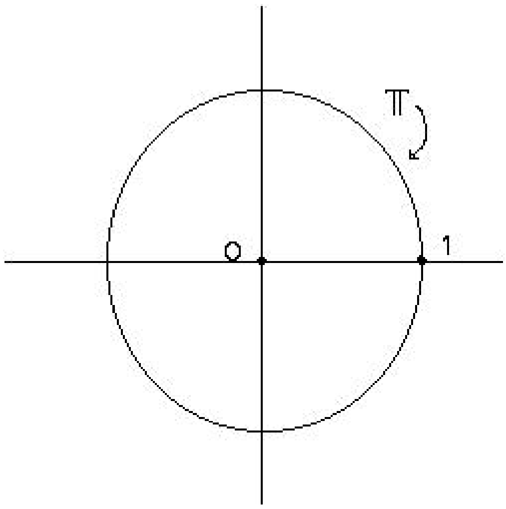
1. $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$
   $\Longrightarrow |zw| = |z||w|$
2. $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z + w}) = z\overline{z}+w\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{w} = |z|^2+2Re\,(zw)+|w|^2 \leq |z|^2+2|z\overline{w}|+|w|^2$

$\square$

1.2 Polarzerlegung

$\mathbb{C}^\times := \mathbb{C}\backslash\{0\} = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| > 0\}$ ist multiplikative Gruppe.

Proposition 1.2.1. $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *'Einheitskreis', ist Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$*



Beweis : $|1| = 1 \Longrightarrow 1 \in \mathbb{T}$ $z, w \in \mathbb{T} \Longrightarrow |zw| = |z||w| = 1 \Longrightarrow zw \in \mathbb{T}$

$z \in \mathbb{T} \Longrightarrow |z^{-1}| = \left|\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right| = |\overline{z}| = |z| = 1 \Longrightarrow z^{-1} \in \mathbb{T}$

$\Longrightarrow \mathbb{T}$ Gruppe, insbesondere Untergruppe. Inverse in $\mathbb{T}$: $z \in \mathbb{T} \Longleftrightarrow z^{-1} = \overline{z}$

□

$(i\mathbb{R}, +) \subset (\mathbb{C}, +)$ Untergruppe

Satz 1.2.2. $\exp : (i\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{T}, \cdot)$, $iy \mapsto \cos y + i \sin y$
ist surjektiver Homomorphismus mit Kern $\exp = 2\pi i\mathbb{Z}$

Beweis :

1. $|\exp(iy)|^2 = \cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Longrightarrow \exp(iy) \in \mathbb{T}$
2. exp Homomorphismus
   $\exp(iy_1 + iy_2) = \exp(i(y_1 + y_2)) = \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) =$
   $\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2) =$
   $(\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \exp(iy_1)\exp(iy_2)$
3. Kern $\exp = \exp^{-1}(\{1\})$
   $\exp(iy) = 1 \Longleftrightarrow \cos y = 1 \wedge \sin y = 0 \Longleftrightarrow y \in \mathbb{Z} \cdot 2\pi \wedge y \in \mathbb{Z}\pi \Longleftrightarrow y \in 2\pi\mathbb{Z}$
4. zz: $\exp(i\mathbb{R}) = Bild(\exp) = \mathbb{T}$
   $z = (x, y) \in \mathbb{T} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1 = |z|^2$
   $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x}$ Da tan surjektiv auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ existiert φ mit
   $\tan\varphi = \frac{y}{x} \Longrightarrow \exp(i\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi = z$ (Die Fälle $x < 0$, $x = 0$ folgen analog.)

□

Satz 1.2.3. $(\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot)$, $z \mapsto \exp(z)$
ist surjektiver Homomorphismus mit Kern exp $=2\pi i\mathbb{Z}$

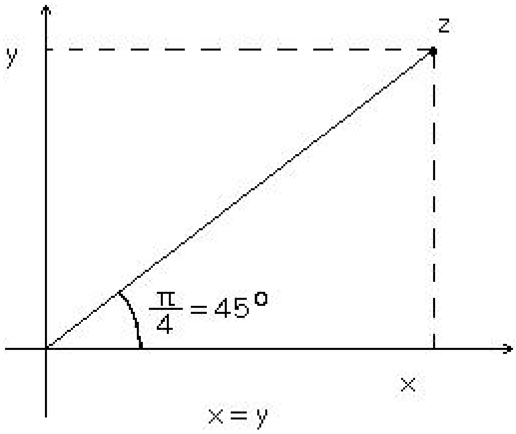
Beweis :

1. $\exp(x+iy) \in \mathbb{C}^\times$, da $|\exp(z)| = |e^x \cdot (\cos y + i \sin y)| = |e^x||e^{iy}| > 0$, also $|e^z| = e^{Re\, z} > 0$
2. exp Homomorphismus klar (s.o.)
3. Kern exp klar (s.o.)
4. exp surjektiv: $w \in \mathbb{C}^\times \Longrightarrow |w| > 0 \Longrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ |w| = e^x$
   $\left|\frac{w}{|w|}\right| = 1 \Longrightarrow \frac{w}{|w|} \in \mathbb{T} \Longrightarrow \exists\, y \in \mathbb{R} : e^{iy} = \frac{w}{|w|} \Longrightarrow w = |w| \cdot \frac{w}{|w|} = e^x e^{iy} = \exp(x + iy)$

□

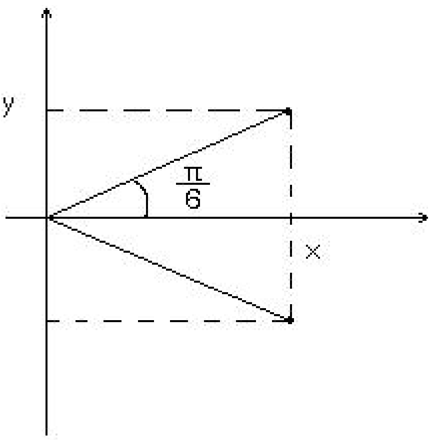
Corollar 1.2.4. *Polarzerlegung*
Jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *hat eindeutige Darstellung* $z = r \cdot e^{i\varphi} = |z|e^{iarg(z)}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ *wobei*
$r = |z| =_+ \sqrt{z\overline{z}} > 0$, $arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

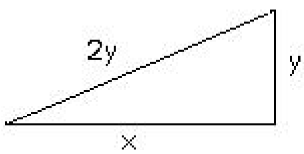
Beispiel 1.2.5. *1.* $z = x + ix = x(1+i) = |z| \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$,
$|z| = |x| \cdot |i+1| = \sqrt{2}|x| \Longrightarrow x + ix = \sqrt{2}|x|e^{i\frac{\pi}{4}}$
speziell: $x = 1,\ z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$



2. $x^2 + y^2 = (2y)^2 = 4y^2 \Longrightarrow x^2 = 3y^2 \Longrightarrow x = \sqrt{3}y \Longrightarrow z = \sqrt{3}y + iy = |z|e^{i\frac{\pi}{6}},\ |z| = 2y$
$\Longrightarrow \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

3. *Einheitswurzel*
$exp : i\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T},\ 2\pi i\mathbb{Q} \subset i\mathbb{R}$
Beh: $\exp(2\pi i\mathbb{Q}) = \{z \in \mathbb{T} : \exists q \in \mathbb{Z}\ mit\ z^q = 1\}$ *Bew:* $t = \frac{q}{p} \Longrightarrow (\exp(2\pi i\frac{p}{q}))^q = \exp(2\pi ip) = 1$
Speziell: $\{1, i, -1, -i\}$ *sind die 4-ten Einheitswurzeln.*





1.3 Topologie auf $\mathbb{C}$

Definition 1.3.1. *Metrik auf* $\mathbb{C}$
$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| =_{+} \sqrt{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}$

Definition 1.3.2. *Produkt-Topologie*
$x_n + iy_n = z_n \underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow} z = x + iy \Longleftrightarrow x_n \underset{\mathbb{R}}{\longrightarrow} x, y_n \underset{\mathbb{R}}{\longrightarrow} y$

Definition 1.3.3. *Stetigkeit*
$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *heißt stetige Abbildung* $:\Longleftrightarrow$
$\forall\, V \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} : f^{-1}(V) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \Longleftrightarrow$
$\forall\, B \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{C} : f^{-1}(B) \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{C}$

Definition 1.3.4. *Zusammenhang*
X *zusammenhängend* $\Longleftrightarrow \forall\, U, V \underset{\text{offen}}{\subset} X$ *und* $U, V \underset{\text{abg.}}{\subset} X$ *mit* $U \cap V = \emptyset$ *gilt:*
$U \cup V = X \implies U = \emptyset$ *oder* $V = \emptyset$

Proposition 1.3.5. *Allgemeiner Zwischenwertsatz*
X *zsh.,* $f : X \longrightarrow Y$ *stetig* $\implies f(X)$ *zusammenhängend*

Proposition 1.3.6. (X, d) *metrisch,* $X \supset (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *zsh. mit* $\bigcap_\lambda X_\lambda \neq \emptyset \implies \bigcup_\lambda X_\lambda$ *zusammenhängend.*

Beweis : $Y := \bigcup_\lambda X_\lambda \subset X$, sei $Y = U \cup V, U, V$ disjunkt und $U, V \underset{\text{offen}}{\subset} Y$ oder $U, V \underset{\text{abg.}}{\subset} Y$
und $p \in \bigcap X_\lambda$ Œ $p \in U$
$\implies p \in X_\lambda \subset U \underset{\text{offen}}{\subset} X_\lambda$ und $p \in X_\lambda \subset U \underset{\text{abg.}}{\subset} X_\lambda$
X_λ zusammenhängend $\implies U \cap X_\lambda = X_\lambda \,\forall\, \lambda \in \Lambda \implies Y = \bigcup_\lambda X_\lambda \cap U = U \implies Y$ zusammenhängend. □

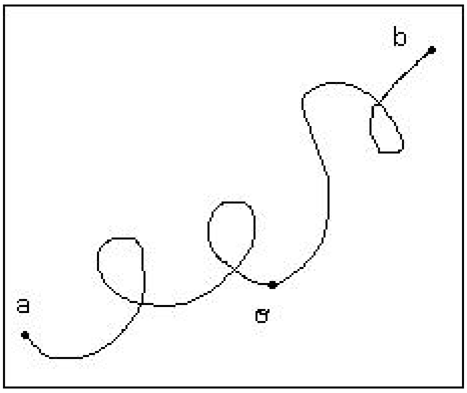
Proposition 1.3.7. (X, d) *metrisch,* $f : X \longrightarrow Y$, $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, A_i *abgeschlossen*
Dann gilt: $f|A_i$ *stetig* $\forall\, i \in \{1, \cdots, n\} \implies f$ *stetig.*

Beweis : Sei $B \underset{\text{abg.}}{\subset} Y \implies \forall\, i,\ (f|A_i)^{-1}(B) \underset{\text{abg.}}{\subset} A_i$
$\implies A_i \cap f^{-1}(B) \underset{\text{abg.}}{\subset} A_i \underset{\text{abg.}}{\subset} X$
$\implies f^{-1}(B) = \bigcup_i [A_i \cap f^{-1}(B)] \underset{\text{abg.}}{\subset} X$ □

Definition 1.3.8. $\varphi : I = [0, 1] \longrightarrow X$ *stetig,* X *metrischer Raum.*
φ *heisst Weg/stetige Kurve/Pfad.*
$\varphi(0)$ *Anfangspunkt,* $\varphi(1)$ *Endpunkt*

Definition 1.3.9. X *wegzusammenhängend* $\Longleftrightarrow \forall\, x, y \in X\, \exists\, \varphi_x^y$ *stetige Kurve mit Anfangspunkt* x *und Endpunkt* y

Proposition 1.3.10. X *wegzusammenhängend* $\implies X$ *zusammenhängend*



Beweis : $a \in X$ fest $\Longrightarrow X = \bigcup_{x \in X} \varphi_a^x[0,1]$, wobei $\varphi_a^x[0,1]$ zusammenhängend für alle x. Ausserdem: $\emptyset \neq \bigcap_{x \in X} \varphi_a^x[0,1] \supset \{a\} \Longrightarrow X$ zusammenhängend □

Ab hier: $X \subset \mathbb{C}$

Definition 1.3.11. *Segment*
$a, b \in \mathbb{C}$, $[a,b] := \{ta + (1-t)b | t \in [0,1]\}$
Jedes Segment ist zusammenhängend, da stetiges Bild des Einheitsintervalles.

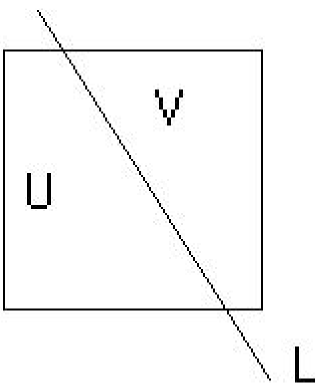
Definition 1.3.12. $\mathbb{C} \supset X \ni o$
$Xo-$ sternförmig $\Longleftrightarrow \forall\, a \in X$ gilt: $[o,a] \subset X$

Bemerkung 1.3.13. *$Xo-$sternförmig $\Longrightarrow X$ wegzusammenhängend $\Longrightarrow X$ zusammenhängend*

Definition 1.3.14. *$X \subset \mathbb{C}$ konvex $\Longleftrightarrow \forall\, a, b \in X : [a,b] \subset X$*
$\Longleftrightarrow Xx-$sternförmig $\forall x \in X$

Beispiel 1.3.15. *1. $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ nicht sternförmig, aber (weg)-zusammenhängend*

2. $\mathbb{R} \supset A$ mit $\mathbb{R} \backslash A \neq \emptyset \Longrightarrow \mathbb{C} \backslash A$ zusammenhängend.
Beweis : $X := \mathbb{C} \backslash A$, $X_+ := \{z \in X | Imz \geq 0\}$, $X_- := \{z \in X | Imz \leq 0\}$,
$X_\pm$ $\pm i$-sternförmig $\Longrightarrow X_\pm$ zusammenhängend
$X_+ \cap X_- = \mathbb{R} \backslash A \neq \emptyset \Longrightarrow X_+ \cup X_-$ zusammenhängend. □
Insbesondere sind $\mathbb{C} \backslash [a,b]$ und $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}$ zusammenhängend.



Proposition 1.3.16. *$P \subset \mathbb{C}$ endlich $\Longrightarrow \mathbb{C} \backslash P$ (weg-)zusammenhängend.*

Beweis Übungsaufgabe: □

1.4 Komplexe Diffbarkeit

Definition 1.4.1. *$D \subset \mathbb{C}$ heisst Gebiet $\Longleftrightarrow D \underset{offen}{\subset} \mathbb{C}$ und D zusammenhängend*

Im folgenden ist D stets ein Gebiet

Definition 1.4.2. *$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $o \in D$*
f heisst komplex diffbar in o

$\Longleftrightarrow \exists \lim_{z \to o, z \neq o} \frac{f(z)-f(o)}{z-o} =: f'(o) \in \mathbb{C}$

$\Longleftrightarrow \exists f'(o) \in \mathbb{C} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in D$ *mit* $|z-o| < \delta$ *ist* $|f(z)-f(o)-f'(o)(z-o)| \leq \varepsilon(z-o)$

Satz 1.4.3. *$f_1, f_2 : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}-$diffbar in $o, f : D \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ $\mathbb{C}$-diffbar in o*

$\Longrightarrow f_1 + f_2,\ f_1 \cdot f_2,\ \frac{f_1}{f}\ \mathbb{C}-$*diffbar in o und*

$(f_1(o) + f_2(o))' = f_1'(o) + f_2'(o)$,
$(f_1(o) \cdot f_2(o))' = f_1'(o)f_2(o) + f_1(o)f_2'(o)$,
$\left(\frac{f_1(o)}{f(o)}\right)' = \frac{f_1'(o)f(o)-f_1(o)f'(o)}{f(o)^2}$

Proposition 1.4.4. *$f\, \mathbb{C}-$diffbar in $o \in D \Longrightarrow$*

1. *$f'(o) \in \mathbb{C}$ eindeutig*
2. *f stetig*

Satz 1.4.5. *Kettenregel*
D_1, D_2 Gebiete, $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in D_1$, $f(a) \in D_2$,
$f\,\mathbb{C}-$ diffbar in a, $g\,\mathbb{C}-$diffbar in $f(a)$

$\Longrightarrow \exists$ Gebiet D mit $D_1 \supset D \ni a$ und $f(D) \subset D_2$, da f stetig in a und:
$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}-$diffbar in a mit $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Reelle Charakterisierung der $\mathbb{C}$-Diffbarkeit

Zu $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definiere:
$u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto Re(f(z))$
$v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto Im(f(z))$
und $f_\mathbb{R} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ z \mapsto (u(z), v(z))$

Dann ist

$f_\mathbb{R}'(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) & \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

die aus Analysis II bekannte Jacobi-Matrix.

Satz 1.4.6. *Cauchy-Riemann-DGL*
f $\mathbb{C}-$diffbar in $c \in D$

$\iff$

1. *$f_{\mathbb{R}}$ (total) diffbar*
2. $\mathbb{R}^{2\times 2} \supset \{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\} = \varphi(\mathbb{C}) \ni f'_{\mathbb{R}}(a,b)$
   $\iff$
   $\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b)$ *und* $\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)$ *(CR)*

Beweis : $f_{\mathbb{R}}$ diffbar in $(a,b) \iff \exists\, f'_{\mathbb{R}}(a,b) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so dass: $\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \forall\, \|(x-a, y-b)\| \leq \delta$
$\|f_{\mathbb{R}}(x,y) - f_{\mathbb{R}}(a,b) - (x-a, y-b)f'_{\mathbb{R}}(a,b)\| \leq \varepsilon\|(x-a, y-b)\|$

Sei nun f $\mathbb{C}-$diffbar in $c = a + ib$. Zu zeigen: $f_{\mathbb{R}}$-diffbar und (CR) gelten:
$|f(z) - f(c) - (z-c)f'(c)| \leq \varepsilon|z-c| \,\forall\, |z-c| \leq \delta$

$|f(z) - f(c) - (z-c)f'(c)| = |u(x,y) + v(x,y)i - u(a,b) - v(a,b)i - ((x-a) + (y-b)i)f'(c)| =$
für $\alpha = Re(f'(c))$, $\beta = Im(f'(c))$:
$|u(x,y) - u(a,b) + (v(x,y) - v(a,b))i - (x-a)\alpha - (y-b)\beta - ((y-b)\alpha + (x+a)\beta)i) =$
$\|\,((u(x,y) - u(a,b) - ((x-a)\alpha - (y-b)\beta), v(x,y) - v(a,b) - ((y-b)\alpha + (x-a)\beta)\,\| =$
$\|(u(x,y), v(x,y)) - (u(a,b), v(a,b)) - (x-a, y-b)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\| \leq \varepsilon|z-c| = \varepsilon\|(x-a, y-b)\|$
$\Longrightarrow f_{\mathbb{R}}$ diffbar in (a,b) mit $f'_{\mathbb{R}}(a,b) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \varphi(\alpha + i\beta)$

□

Definition 1.4.7. $\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \in \mathbb{C} \ni \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$

Definition 1.4.8. *Wirtinger-Ableitungen* $\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y})$

Proposition 1.4.9. $\frac{\partial f}{\partial z}(fg) = \frac{\partial f}{\partial z}g + f\frac{\partial g}{\partial z}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$
für alle $\mathbb{R}$-diffbaren Funktionen $f, g :\ D \longrightarrow \mathbb{C}$

Beweis : $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ erfüllen Derivationsregeln, $\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial z}$, $\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ erfüllen als komplexe Linearkombinationen Derivationsregeln. □

Satz 1.4.10. *(CR)*
f komplex diffbar $\iff$

1. *f $\mathbb{R}$-diffbar*
2. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 0$

Beweis : unmittelbar aus (CR) □

Beispiel 1.4.11. $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ *auf* $D = \mathbb{C}$ *reell diffbar,*
$u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$
f *nicht komplex diffbar.*
Beweis 1: CR gelten nicht.
Beweis 2: $f(z) = z\bar{z} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z\bar{z}) = \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \cdot \bar{z} + z \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = z$
$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \neq 0$ *auf* $\mathbb{C}^\times$
$\Longrightarrow f$ *nicht* $\mathbb{C}-$*diffbar auf* $\mathbb{C}^\times$, $\quad f \quad \mathbb{C}$-*diffbar in* 0

Beispiel 1.4.12. $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, $D = \mathbb{C}^\times$ *(Gebiet)*
$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{1}{\bar{z}} = \frac{-\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}}}{\bar{z}^2} = -\frac{1}{\bar{z}^2} \neq 0$, *also ist* f *nirgends* $\mathbb{C}-$*diffbar.*

Beispiel 1.4.13. $e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy}$ *ist* $\mathbb{C}$-*diffbar,*
$u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$

Beispiel 1.4.14. $p, q \in \mathbb{C}[z]$ *Ring der Polynome in* $z, q \neq 0$, $N_q := \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$ *endlich*
$\# N_q = grad\, q$
$f := \frac{p}{q} : \mathbb{C} \backslash N_q \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist* $\mathbb{C}-$*diffbar und* $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\frac{\partial p}{\partial z} q - p \frac{\partial q}{\partial z}}{q^2}$
$\mathbb{C}(z) := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{C}[z],\ q \neq 0\}$ *ist Körper*

Definition 1.4.15. *1.* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$
f *holomorph* $\Longleftrightarrow \quad f\ \mathbb{C}-$*diffbar auf* D

2. $\mathcal{O}(D) := \{f : D \longrightarrow \mathbb{C} : f$ *holomorph*$\}$ *ist kommutativer unitaler Ring, sogar* $\mathbb{C}$-*Algebra.*

Beispiel 1.4.16. *Möbius-Transformation*
Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, *det* $A \neq 0$ *dann ist*
$[A] : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto [A](z) := \frac{az+b}{cz+d}$
die Möbiustransformation zu A. $[A]$ *ist holomorph auf* D*, wobei* $D = \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\} & c \neq 0 \\ \mathbb{C} & sonst \end{cases}$

Bemerkung 1.4.17. $[A] = [\lambda A]\, \forall \lambda \in \mathbb{C}^\times$, *also können wir ohne Einschränkung* $detA = 1$ *annehmen.*

Beispiel 1.4.18. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}(z) = \frac{1}{z}$ *'Inversion'*
$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(z) = z + b$ *'Translation'*

Satz 1.4.19. $[A \cdot B] = [A] \circ [B]$

Beweis : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}(z) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) =$
$\frac{a\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d} = \frac{a(\alpha z+\beta)+b(\gamma z+\delta)}{c(\alpha z+\beta)+d(\gamma z+\delta)} = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix}(z) = [A \cdot B](z)$ $\square$

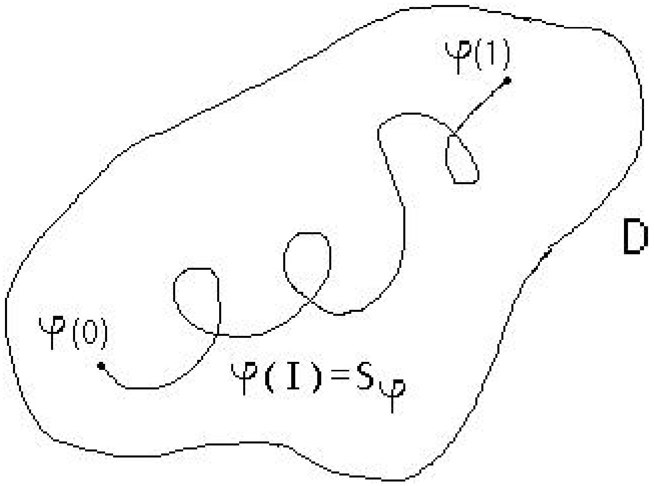
Kapitel 2

Komplexe Integration (Cauchy-Theorie)

2.1 Kurvenintegrale

$D \subset \mathbb{C}$ Gebiet,

Definition 2.1.1. *φ 'Weg' $\Longleftrightarrow \varphi : [0,1] \longrightarrow D$ stetig $\varphi(0)$ 'Startpunkt', $\varphi(1)$ 'Endpunkt',*



$S_\varphi := \varphi([0,1])$ *'Spur'*

Beispiel 2.1.2. *Segment*

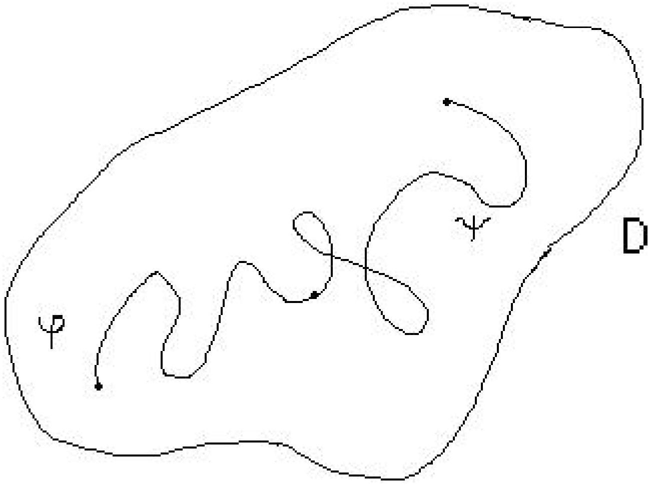
$\varphi(t) = ta + (1-t)b$, *b Anfangspunkt, a Endpunkt,* $S_\varphi = [b,a]$

Beispiel 2.1.3. *Kreis* $\psi(t) := a + re^{2\pi i}$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $t \in [0,1]$, $\psi(0) = a + r$, $\psi(1) = a + r$

Definition 2.1.4. *Weg φ geschlossen $\Longleftrightarrow \varphi(0) = \varphi(1)$*

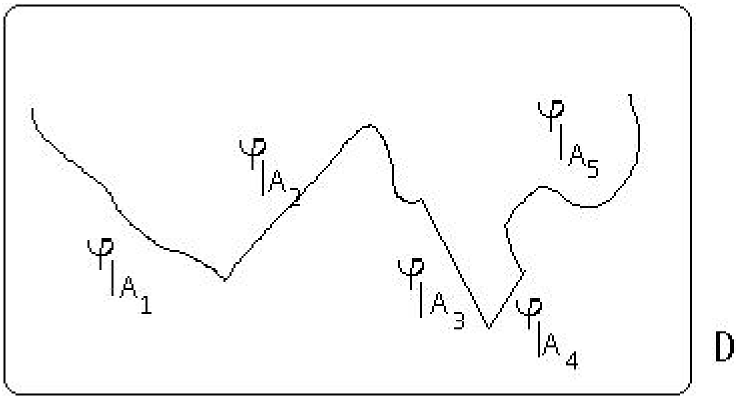
Definition 2.1.5. *φ Weg, $\varphi^- : [0,1] \longrightarrow D$, $t \mapsto \varphi(1-t)$ ebenfalls Weg, $S_\varphi = S_{\varphi^-}$*

Definition 2.1.6. *Seien ψ, φ Wege mit $\varphi(1) = \psi(0)$, $\psi \oplus \varphi : [0,1] \longrightarrow D; t \mapsto \begin{cases} \varphi(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \psi(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ ist dann ebenfalls ein Weg mit Startpunkt $\varphi(0)$ und Endpunkt $\psi(1)$. $\psi \oplus \varphi$ ist stetig, da jeweils auf abgeschlossenen Intervallen stetig, deren Vereinigung $[0,1]$ ist. $S_{\varphi \oplus \psi} = S_\varphi \cup S_\psi$*



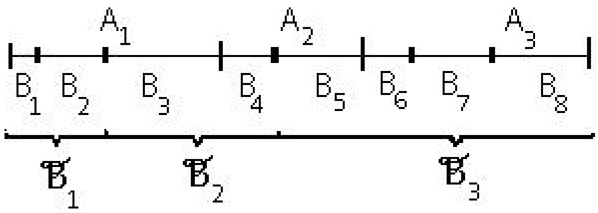
Lemma 2.1.7. $\varphi^- \oplus \psi^- = (\psi \oplus \varphi)^-$

Definition 2.1.8. *$\varphi : I \longrightarrow D$ stetiger Weg heisst stückweise $\mathcal{C}^1$−Kurve bzw. Kurve $\Longleftrightarrow$ $\exists I = \dot{\bigcup}_{j=1,\ldots,n} I_j$ Partition in abgeschlossene Teilintervalle mit $\varphi|I_j \in \mathcal{C}^1(I_j, D)$*



Definition 2.1.9. *Bogenlänge*
$\varphi = \sum_{A \in \mathcal{A}} \varphi|A$ sei Kurve. $l(\varphi) := \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_A |\varphi'(t)|dt < \infty$ heisst die 'Bogenlänge' von φ, $\varphi'(t)$ 'Geschwindigkeit'

Definition 2.1.10. *Verfeinerung*
Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Partitionen des Intervalls I, d.h. $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} = I$. Dann heisst $\mathcal{B}$ feiner als $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_A$ wobei $\mathcal{B}_A$ Partition von A



Lemma 2.1.11. *Zu je zwei Partitionen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des Intervalles I existiert eine gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{C}$*

Beweis : $\mathcal{C} := \{A \cap B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\} =: \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ $\square$

Proposition 2.1.12. *φ Kurve zur Partition $\mathcal{A}$ und zur Partition $\mathcal{B} \Longrightarrow \sum_{A\in\mathcal{A}} \int_A |\varphi'(t)|dt = \sum_{B\in\mathcal{B}} \int_B |\varphi'(t)|dt$*

Beweis : Wähle gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{C} = \mathcal{A}\vee\mathcal{B}$, dh. Œ $\mathcal{B}$ feiner als $\mathcal{A} \Longrightarrow \sum_{B\in\mathcal{B}} \int_B |\varphi'(t)|dt = \sum_{A\in\mathcal{A}} \sum_{B\in\mathcal{B}_A} \int_B |\varphi'| = \sum_{A\in\mathcal{A}} \int_A |\varphi'|dt$ dh. Bogenlänge ist unabhängig von Partition. □

Proposition 2.1.13. *φ, ψ Kurven mit $\varphi(1) = \psi(0) \Longrightarrow \varphi \oplus \psi$ Kurve und $l(\varphi \oplus \psi) = l(\varphi) + l(\psi)$, φ^- Kurve und $l(\varphi^-) = l(\varphi)$*

Definition 2.1.14. *1-Form (=Differentialform)*

$f, g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ Eine 1-Form ω ist ein Element des Moduls $\mathcal{C}(D, \mathbb{C}) < dx, dy >$, d.h. jede 1-Form lässt sich eindeutig als $\omega = fdx + gdy$ darstellen. Analogie zu Vektorraum: dx, dy 'Basen', $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ 'Körper' (ist aber nur Algebra) D.h. 1-Form $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy$, $\omega_x, \omega_y \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$

Lemma 2.1.15. *$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ $dz := dx + idy$, $d\bar{z} := dx - idy$ sind 1-Formen. $\Longrightarrow \omega = \omega_z dz + \omega_{\bar{z}} d\bar{z}$ eindeutig mit $\omega_z, \omega_{\bar{z}} \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$*

Beweis : $\omega_z dz + \omega_{\bar{z}} d\bar{z} = \omega_z(dx + idy) + \omega_{\bar{z}}(dx - idy) = (\omega_z + \omega_{\bar{z}})dx + i(\omega_z - \omega_{\bar{z}})dy = \omega_x dx + \omega_y dy$, d.h. $\omega_x = \omega_z + \omega_{\bar{z}}$, $\omega_y = i(\omega_z - \omega_{\bar{z}})$

$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_z \\ \omega_{\bar{z}} \end{pmatrix}$ d.h. $d_z, d_{\bar{z}}$ ebenfalls Basis □

Definition 2.1.16. *Kurvenintegral*
$\varphi : I \longrightarrow D$ Kurve, $\omega = \omega_z dz + \omega_{\bar{z}} d\bar{z}$ 1-Form auf D

$$\int_\varphi \omega := \sum_{A\in\mathcal{A}} \int_{\varphi|A} \omega := \sum_{A\in\mathcal{A}} \int_A \omega_z(\varphi(t))\varphi'(t) + \omega_{\bar{z}}(\varphi(t))\overline{\varphi'(t)}dt$$

Lemma 2.1.17. *Standard-Abschätzung für Kurvenintegrale*
$|\int_\varphi \omega| \leq l_\varphi(\sup_{S_\varphi} |\omega_z| + \sup_{S_\varphi} |\omega_{\bar{z}}|)$

Beweis : Nach Def gilt: $\int_{\varphi\oplus\psi} \omega = \int_\varphi \omega + \int_\psi \omega$ und $\int_{-\varphi} \omega = -\int_\varphi \omega$
Daher Œ $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$, da $l_{\varphi\oplus\psi} = l_\varphi + l_\psi$ additiv.
$|\int_\varphi \omega| = |\int_I [\omega_z(\varphi(t))\varphi'(t) + \omega_{\bar{z}}(\varphi(t))\overline{\varphi'(t)}]dt| \leq \int_I |\omega_z(\varphi(t))\varphi'(t) + \omega_{\bar{z}}(\varphi(z))\overline{\varphi'(t)}]|dt$
$\leq \int_I |\omega_z(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)| + |\omega_{\bar{z}}(\varphi(t))||\varphi'(t)|]dt \leq \sup_{t\in I} |\omega_z(\varphi(t))| \cdot \int_I |\varphi'(t)|dt + \sup_{t\in I} |\omega_{\bar{z}}(\varphi(t))| \cdot \int_I |\varphi'(t)|dt = \sup_{S_\varphi} |\omega_z| \cdot l_\varphi + \sup_{S_\varphi} |\omega_{\bar{z}}| \cdot l_\varphi$ □

Beispiel 2.1.18. *1. $\int_{\partial B_r(0)} z^m dz =?$*
$\partial B_r(0) = \{|z| = r\} = S_\varphi$ mit $\varphi(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\varphi'(t) = rie^{it}$
$\omega = z^m dz + 0d\bar{z}$
$\int_{\partial B_r(0)} z^m dz = \int_\varphi z^m dz = \int_0^{2\pi} \varphi(t)^m \varphi'(t)dt = \int_0^{2\pi} r^m e^{imt} ire^{it} = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}dt = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} \cos(m+1)t + i\sin((m+1)t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & \end{cases}$
insbesondere unabhängig von r.

2. $\int_{\partial B_r(0)} Re(z)dz = \int_\varphi xdz = \int_0^{2\pi} r \cdot \cos(t) ire^{it}dt$ *mit:*
$z = r \cdot e^{it}$, $x = r \cdot \cos(t), \varphi'(t)dt = ire^{it}dt$
$= ir^2[\underbrace{\int_0^{2\pi} cos^2(t)dt}_{=\pi} + \underbrace{i\int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)dt}_{=0}] = ir^2\pi = i\cdot$ *Fläche von* $B_r(0)$

2.2 Integrabilität

Definition 2.2.1. *Differential einer Funktion*
$f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{C})$
$df := \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ *mit* $\frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C}) \ni \frac{\partial f}{\partial y}$

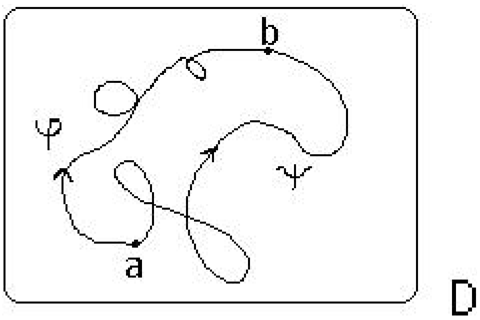
Proposition 2.2.2. *Wirtinger*
$\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C}) \Longrightarrow df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$

Beweis : Def. von $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ □

Definition 2.2.3. ω *1-Form auf* D*, stetig*
ω *integrabel (total, konservativ)* $\Longleftrightarrow \exists f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{C})$ *mit* $\omega = df$
ω *heisst dann 'Stammfunktion von* f*'*

Satz 2.2.4. *1. Integrabilitäts-Satz*
ω *stetige 1-Form auf* D.
Dann sind äquivalent:

1. ω *integrabel,* $\omega = df$
2. $\int_\varphi \omega = \int_\psi \omega \quad \forall \psi, \varphi$ *Kurven in* D *mit* $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi(1) = \psi(1)$
3. $\int_\gamma \omega = 0 \,\forall$ *Kurven* γ *in* D *mit* $\gamma(0) = \gamma(1)$

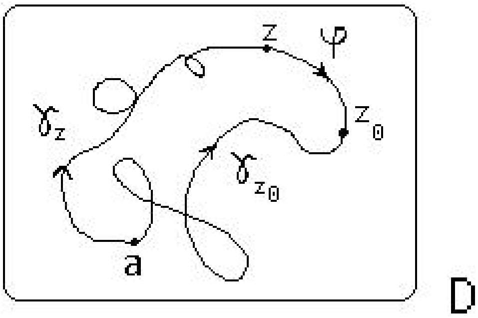


Beweis :

[1 ⇒ 3 $\int_\gamma \omega = \int_\gamma df =_{\text{Kettenregel}} \int_0^1 \frac{d}{dt}f(\gamma(t))dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0$, da γ geschlossen.

3 ⇒ 2 φ, ψ gleiche Anfangs- und Endpunkte, $\gamma := \varphi \oplus \psi^-$, d.h. γ geschlossen.
$\Longrightarrow 0 = \int_\gamma \omega = \int_\psi^- \omega + \int_\varphi \omega = -\int_\psi \omega + \int_\varphi \omega$

$3 \Rightarrow 1$ $a \in D$ fest, für alle $z \in D$ wähle $\gamma_z : [0,1] \longrightarrow D$ Kurve mit $\gamma_z(0) = a$, $\gamma_z(1) = z$, wegen 3 hängt $\int_{\gamma_z} \omega$ nur von z ab. $\Longrightarrow f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_{\gamma_z} \omega$ wohldefiniert.
Beh.: $df = \omega$
Bew.: Sei $z_0 \in D$, D offen $\Longrightarrow \exists r > 0$ mit $B_r(z_o) \subset D \Longrightarrow \forall z \in B_r(z_0)$ gilt: $[z, z_0] \subset B_r(z_0) \subset D$. Sei $\varphi(t) = z + t(z_o - z)$, $t \in [0,1]$



$f(z) - f(z_0) = \int_{\gamma_z} \omega - \int_{\gamma_{z_0}} \omega =_{abhierauchBew.von2.2.8}= \int_{\gamma_z} \omega + \int_{\varphi} \omega - \int_{\gamma_{z_0}} \omega - \int_{\varphi} \omega = \left(\int_{\gamma_z \oplus \varphi} \omega - \int_{\gamma_{z_0}} \omega\right) - \int_{\varphi} \omega = 0 - \int_{\varphi} \omega$, nach 3,da $\gamma_z \oplus \varphi$ und γ_{z_0} gleiche Anfangs- und Endpunkte haben. Es folgt:

$|f(z) - f(z_0) - \omega_z(z_0)(z - z_0) - \omega_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)|$

$= |\int_{\varphi} \omega + \omega_z(z_0)(z - z_0) + \omega_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)|$

$\leq |\int_{\varphi} \omega| + |\omega_z(z_0)| \cdot |z - z_0| + |\omega_{\bar{z}}(z_0)| \cdot |z - z_0|$

$\leq l(\varphi) \cdot (\sup_{S_\varphi} |\omega_z| + \sup_{S_\varphi} |\omega_{\bar{z}}|) + (|\omega_z(z_0)| + |\omega_{\bar{z}}(z_0)|) \cdot |z - z_0|$

$\leq 2 \cdot (\sup_{S_\varphi} |\omega_z| + \sup_{S_\varphi} |\omega_{\bar{z}}|) \cdot |z - z_0|$

Da S_φ kompakt:

$\leq 2 \cdot (c + 1) \cdot |z - z_0| \leq \varepsilon \, \forall z$ mit $|z - z_0| \leq \delta := \frac{\varepsilon}{2(c+1)}$

$\Longrightarrow df = \omega$

$\square$

Beispiel 2.2.5. $D = \mathbb{C}^\times$, $n \in \mathbb{Z}$, ,$\omega = z^n dz$ *ω integrabel in $D \Longleftrightarrow n \neq -1$*

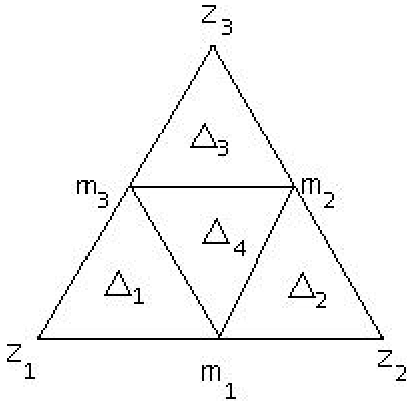
Denn: $n = -1 \Longrightarrow \omega = \frac{dz}{z}; \int_{B_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \Longrightarrow \frac{dz}{z}$ *nicht integrabel.*

$n \neq -1 \Longrightarrow \omega = df$ *für* $f(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$

Bemerkung 2.2.6. *Seien* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$\Delta := conv(z_1, z_2, z_3) = \{z \in \mathbb{C} | \exists \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in [0,1]$ *mit* $\sum_1^3 \mu_i = 1$ *und* $z = \sum \mu_i \cdot z_i\}$

$\Delta \subset \mathbb{C}$ *kompakt,* $\partial\Delta = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1]$, $l(\partial\Delta) = |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + |z_3 - z_1|$



Proposition 2.2.7. *1.* $max\{|z-w| \text{ mit } z, w \in \Delta\} \leq l(\partial\Delta)$

2. $l(\partial\Delta_k) = \frac{1}{2} l(\partial\Delta)$

Satz 2.2.8. *2. Integrabilitätssatz*
Äquivalent:

1. ω *integrabel*

2. $\int_{\partial\Delta} \omega = 0 \forall$ *abgeschlossene Dreiecke* $\Delta \subset D$

Beweis :

$(1 \Longrightarrow 2$ 1. Integrabilitätssatz

$2 \Longrightarrow 1$ Sei $a \in D$, $\forall z \in D$ gilt: $[a, z] \subset D$;
$\gamma_z(t) = a + t(z-a)$, $t \in [0,1]$ $\quad f(z) := \int_{\gamma_z} \omega$
Beh.: $df = \omega$
Bew.: $\Delta := con(a, z_0, z) \subset D$, da $con(a, z_0, z)$ kleinste konvexe Menge, die $\{a, z, z_o\}$ enthält. Mit 2 folgt: $0 = \int_{\partial\Delta} \omega = \int_{\gamma_{z_0}} \omega + \int_{[z_0,z]} \omega - \int_{\gamma_z} \omega \Longrightarrow f(z) - f(z_0) = \int_{[z_0,z]} \omega$ und weiter wie im Beweis zum 1. Integrabilitätssatz

□

2.3 Der Cauchy'sche Integralsatz

Bisher betrachtet: $\omega = df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$

Dann gilt nach 1. Integrabilitätssatz $\int_\gamma \omega = 0 \forall$ geschlossenen Kurven γ

Betrachte nun 1-Formen der Form $\omega = f dz$
Frage: Welche Bedingung muss f erfüllen, damit $\int_\gamma \omega = 0 \forall$ geschlossene Kurven γ gilt ?

Beispiel 2.3.1. $D = \mathbb{C}$, $f(z) := Rez \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $\omega = f dz$ *Nach 2.1.18 und dem 1. Integrabilitätssatz gilt, dass* ω *nicht integrabel ist,* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *reicht offenbar nicht aus.*

Satz 2.3.2. *von Goursat*
$f \in \mathcal{O}(D,\mathbb{C})$, $\Delta \subset D$ *abgeschl. Dreieck* $\Longrightarrow \int_{\partial\Delta} f dz = 0$

Beweis :

Integration in immer gleicher (induzierter) Orientierung

1. Schritt: zz: $\int_{\partial\Delta} f dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^k} f dz]$

   $\sum_{k=1}^{3} \int_{\partial\Delta_1^k} f dz = \int_{\partial\Delta} f dz + \int_{[B,A]} f dz + \int_{[C,B]} f dz + \int_{[A,C]} f dz$
   und $\int_{\partial\Delta_1^4} f dz = \int_{[B,A]} f dz + \int_{[C,B]} f dz + \int_{[A,C]} f dz \Longrightarrow$ Beh.

2. Schritt: Konstruktion einer Folge von Dreiecken $\Delta_{k+1} \underset{\neq}{\subset} \Delta_k$ mit $\left|\int_{\partial\Delta} f dz\right| \leq 4^k \left|\int_{\partial\Delta_k} f dz\right|$

   Sei $\Delta_0 := \Delta$, $\Delta_1 \in \{\Delta_1^1, \ldots, \Delta_1^4\}$ so, dass $\int_{\partial\Delta_1} f dz = \max_1^4 \left|\int_{\partial\Delta_1^k} f dz\right|$

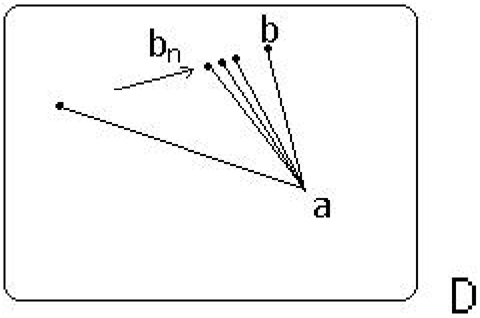
   Dann gilt nach 1. Schritt:
   $|\int_{\partial\Delta} f dz| \leq \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_1^k} f dz\right| \leq 4 \cdot max_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_1^k} f dz\right| = 4 \cdot \int_{\partial\Delta_1} f dz$
   Eine iterative Aufteilung von Δ_k ergibt bei analoger Konstruktion die gewünschte Folge.
   Ausserdem ergibt sich für
   $l(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2} l(\partial\Delta_{n-1}) \Longrightarrow l(\partial\Delta_n) \leq 2^{-n} l(\partial\Delta)$
   und da Δ_k kompakt, echte Teilmengen $\Longrightarrow \exists_1 z_0 \in \Delta_0$ mit $\{z_0\} = \bigcap_k \Delta_k$

3. Schritt: Abschätzung des Integrals durch lineare Approximation
   $\bigcap_k \Delta_k = \{z_0\} \subset D \Longrightarrow f \mathbb{C}$-diffbar in z_0 (sogar holomorph)
   $\Longrightarrow \exists A$ stetig nahe z_0, $A(z_0) = 0$ mit
   $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + A(z)(z - z_0) \quad \forall z$ nahe z_0
   $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ist ein Polynom in z, besitzt somit eine Stammfunktion, also gilt nach einem Integrabilitätssatz:
   $\left|\int_{\partial\Delta_n} f dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} A(z)(z - z_0) dz\right| \leq l(\partial\Delta_n) \cdot max_{z \in \partial\Delta_n}\{|z - z_0| \cdot |A(z)|\}$
   $\leq l(\partial\Delta_n)^2 \cdot max_{z \in \partial\Delta_n}|A(z)| \leq 4^{-n} l(\partial\Delta)^2 \cdot max_{z \in \partial\Delta_n}|A(z)|$
   nach Schritt 2 gilt:
   $\left|\int_{\partial\Delta} f dz\right| = 4^n \cdot \left|\int_{\partial\Delta_n} f dz\right| \leq l(\partial\Delta)^2 \cdot max_{z \in \partial\Delta_n}|A(z)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l(\partial\Delta)^2 \cdot |A(z_0)| = 0$
   $\Longrightarrow$ Beh.

□

Lemma 2.3.3. $f \in \mathcal{C}(D)$, $a, b \in D$, $b_n \in D$, $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ *und* $[a,b] \subset D \supset [a, b_n]$

$\Longrightarrow \int_{[a,b_n]} f dz \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f dz$



Beweis : Da $b_n \longrightarrow b \Longrightarrow L := \{b_n : n \geq 0\} \cup \{b\}$kompakt $\subset D \Longrightarrow K := \bigcup_{n\geq 0}[a, b_n] \cup [a, b] \subset D$ kompakt, denn K ist stetiges Bild von $L \times I$ unter der Abbildung $\Phi(z, t) = a + t(z - a)$

f stetig auf $K \Longrightarrow f$ gleichmäßig stetig auf $K \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall z, w \in K |z - w| \leq \delta \Longrightarrow |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$

Da $b_n \longrightarrow b$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \, |b_n - b| \leq \delta$

$\int_{[a,b_n]} f dz - \int_{[a,b]} f dz = \int_0^1 f(a + t(b_n - a))(b_n - a)dt - \int_0^1 f(a + t(b - a))(b - a)dt$

$= \int_0^1 (f(a + t(b_n - a)) - f(a + t(b - a)))dt \cdot (b_n - a) + (b_n - b) \int_0^1 f(a + t(b - a))dt$

$\Longrightarrow \left| \int_{[a,b_n]} f dz - \int_{[a,b]} f dz \right|$

$\leq \underbrace{\sup_{t\in[0,1]} |f(a + t(b_n - a)) - f(a + t(b - a))| \cdot |b_n - a|}_{\leq |b_n - b| + |b - a|} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \delta} \cdot \underbrace{\sup_{t\in[0,1]} |f(a + t(b - a)|}_{\text{const.}}$

dabei gilt die erste Klammer wegen $|(a + t(b_n - a)) - (a + t(b - a))| = |t(b_n - b)| \leq |b_n - b| \leq \delta$

insgesamt: $\exists n_1 \geq n_0 \, \forall n \geq n_1 : \left| \int_{[a,b_n]} f dz - \int_{[a,b]} f dz \right| \leq 2\varepsilon$

□

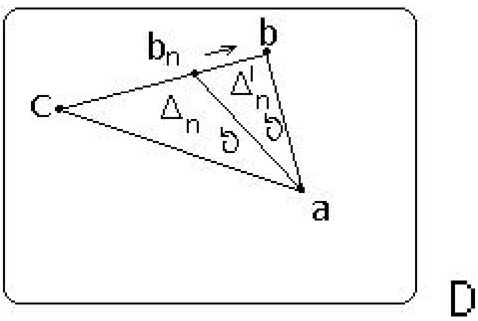
Corollar 2.3.4. *Cauchy mit Ausnahmepunkt*
$o \in D \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(D)$ *und* $f|_{D\backslash\{o\}} \in \mathcal{O}(D\backslash\{o\})$
$\Longrightarrow \int_{\partial\Delta} f dz = 0 \forall \, \Delta \subset D$

Beweis :

$o \notin \Delta$ $\Longrightarrow \int_{\partial\Delta} f dz = 0$ nach normalem Cauchy, der später formuliert und bewiesen wird.

$o \in \Delta$ Sei $o \in \Delta = \Delta(a, b, a)$

1.Fall: o Ecke, dh. $o \in \{a, b, c\}$, Œ $o \in b$



Orientierung so, dass das Innere links liegt.

$b_n := c + t_n(b-c)$ wobei $t_n \longrightarrow 1$, $t_n < 1$

$\Delta_n \subset D\backslash\{o\} \Longrightarrow \int_{\partial\Delta_n} f\,dz = 0$ (Cauchy)

$\int_{\partial\Delta'_n} f\,dz = \int_{[a,b]} f\,dz + \int_{[b,b_n]} f\,dz + \int_{[b_n,a]} f\,dz = \underbrace{\int_{[a,b]} f\,dz - \int_{[a,b_n]} f\,dz}_{\to 0 \text{ Lemma}} + \int_{[b,b_n]} f\,dz$

$\int_{[b,b_n]} f\,dz \leq \sup_{[b,b_n]} |f| \cdot |b - b_n| \longrightarrow 0$

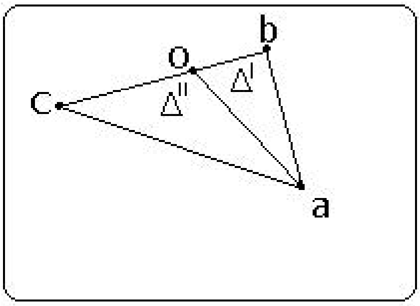
$\Longrightarrow \int_{\partial\Delta'_n} f\,dz \longrightarrow 0$

Also $\int_{\partial\Delta} f\,dz = \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f\,dz}_{=0,\text{ da } o\notin\Delta_n} + \underbrace{\int_{\partial\Delta'_n} f\,dz}_{\to 0}$

$\Longrightarrow \int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$

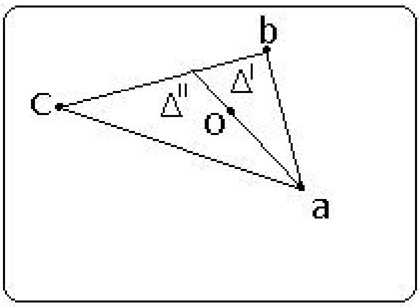
2. Fall: $o \in \partial\Delta\backslash\{a,b,c\}$

Œ$o \in]b,c[\Longrightarrow \Delta = \Delta' \cup \Delta''$ mit o Ecke von $\Delta' = [a,o,c]$, und $\Delta'' = (a,b,o) \Longrightarrow \int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{\partial\Delta'} f\,dz + \int_{\partial\Delta''} f\,dz = 0$ nach Fall 1



D

3. Fall: $o \in \Delta\backslash\partial\Delta$



D $\int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{\partial\Delta'} f\,dz + \int_{\partial\Delta''} f\,dz = 0$ nach Fall 2

$\square$

Satz 2.3.5. *Cauchy für Kreise*

$f \in \mathcal{O}(D\backslash\{o\}) \cap \mathcal{C}(D) \Longrightarrow \int_{\partial B_r(o)} f\,dz = 0 \,\forall \overline{B_r(o)} \subset D$

Beweis :

kompakt $\to \overline{B_r(o)} \subset D$ offen $\Longrightarrow \exists\, R > r$ mit $\overline{B_r(o)} \subset B_R(o) =: D' \subset D$

Da $f|_{D'} \in \mathcal{C}(D') \cap \mathcal{O}(D' \backslash \{o\}) \Longrightarrow \int_{\partial\Delta} f dz = 0 \, \forall \, \Delta \subset D'$ (Cauchy mit Ausnahmepunkt)

D' konvex und f stetig $\Longrightarrow fdz$ integrabel. Da $B_R(o) \supset \partial B_r(o)$ Spur eines geschlossenen Weges gilt nach dem 1. Integrabilitätsstz $\int_{\partial B_r(o)} f dz = 0$ □

2.4 Windungszahl

Definition 2.4.1. *Zu* $\varphi : I = [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ *stetig diffbar, definiere* $\tilde{\varphi}(t) := \int_0^t \frac{d\varphi}{\varphi} = \int_0^t \frac{\varphi'(s)ds}{\varphi(s)} \in \mathbb{C}$

$\tilde{\varphi}$ *heisst Liftung von* φ

Proposition 2.4.2. *1.* $\tilde{\varphi}$ *stetig diffbar auf I*

2. $exp\tilde{\varphi}(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}$

Beweis : Da φ stetig diffbar ist, folgt $\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}$ stetig

$\Longrightarrow \tilde{\varphi}(t) = \int_0^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds$ diffbar mit $\tilde{\varphi}'(t) = \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \Longrightarrow \tilde{\varphi}$ stetig diffbar

$\Longrightarrow$

$$\left[\frac{exp \circ \tilde{\varphi}}{\varphi}\right]'(t) = \frac{(exp \circ \tilde{\varphi})'(t)\varphi(t) - exp(\tilde{\varphi}(t))\varphi'(t)}{\varphi^2(t)} = \frac{(exp \circ \tilde{\varphi})(t) \cdot \tilde{\varphi}(t)'\varphi(t) - exp(\tilde{\varphi}(t))\varphi'(t)}{\varphi^2(t)} = \frac{(exp \circ \tilde{\varphi}(t))\overbrace{(\tilde{\varphi}'(t) \cdot \varphi(t) - \varphi'(t))}^{=0 \forall t}}{\varphi^2(t)}$$

$\Longrightarrow \frac{exp(\tilde{\varphi}(t))}{\varphi(t)}$ konstant $\Longrightarrow \frac{exp(\tilde{\varphi}(0))}{\varphi(0)} = \frac{1}{\varphi(0)}$

$\Longrightarrow exp(\tilde{\varphi(t)}) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}$

□

Spezialfall:

$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig diffbar mit $\varphi(0) = 1 \Longrightarrow \tilde{\varphi} = log\varphi$

Definition 2.4.3. *Sei* $\gamma : I \longrightarrow D$ *stückweise* $\mathcal{C}^1-$*Kurve, geschlossen Sei* $o \in \mathbb{C} \backslash S_\gamma$

$Ind_o\gamma := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-o}$ *die Windungszahl bzw. der Index*

Bemerkung 2.4.4. *Die Windungszahl ist wohldefiniert, da* $f = \frac{1}{z-o}$ *holomorph auf* $\mathbb{C} \backslash \{o\}$ *und* $o \notin S_\gamma$

Satz 2.4.5. γ *geschlossen* $\Longrightarrow Ind_o\gamma \in \mathbb{Z}$

Beweis : $2\pi i Ind_o\gamma = \int_\gamma \frac{dz}{z-o} = \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-o} ds = \tilde{\gamma} - o(1) \Longrightarrow exp(2\pi i Ind_o\gamma) = exp(\tilde{\gamma} - o(1)) = \frac{(\gamma-o)(1)}{(\gamma-o)(0)} = \frac{\gamma(1)-o}{\gamma(0)-o} = 1 \Longrightarrow 2\pi i Ind_o\gamma \in Kern \exp = 2\pi i\mathbb{Z} \Longrightarrow Ind_o\gamma \in \mathbb{Z}$

□

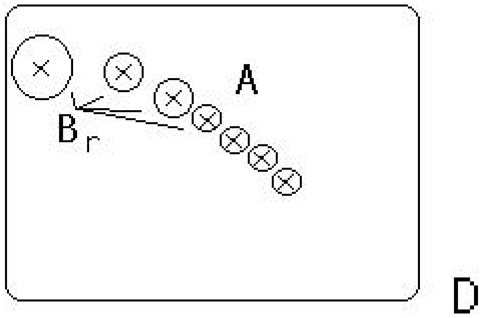
Beispiel 2.4.6. $\gamma(t) = re^{it}$ *Kreis auf* $[0, 2\pi)$, $S_\gamma = \partial B_r(0)$

Lemma: Für $|a| < r$ *gilt* $\int_{|z|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ *oder äquivalent:* $Ind_a\gamma = 1$

Beweis 1. Möglichkeit: über Stetigkeit:

Hilfsmittel

Definition 2.4.7. $\mathbb{C} \supset A$ *diskret* $\Longleftrightarrow \forall\, a \in A\, \exists\, r > 0 : A \cap B_r(a) = \{a\} \Longleftrightarrow$ *Jede Teilmenge* $B \subset A$ *ist offen relativ* A.



Proposition 2.4.8. *X zusammenhängend, metrisch, A diskret*

$f : X \longrightarrow A$ *stetig* $\Longrightarrow f$ *konstant*

Beweis : *$f(X)$ zusammenhängend, also 1-punktig, da A diskret.* □

Sei nun

$$n : \overbrace{B_r(0)}^{\text{zsh. da konvex}} \longrightarrow \overbrace{2\pi i\mathbb{Z}}^{\text{diskret}}, \quad a \mapsto n(a) = \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

n ist stetig, da $\frac{1}{z-a}$ stetig in a

$\Longrightarrow$ *n ist konstant, $n(0) = 2\pi i$ nach 2.2.5*

$\Longrightarrow n \equiv 2\pi i$

$\Longrightarrow Ind_a \gamma = 1$

□

Beweis 2. Möglichkeit: über Diffbarkeit:

$n(\xi) = \int_\gamma \frac{dz}{z-\xi}$, $|\xi| < r$

Da $\frac{1}{z-\xi}$ $\mathbb{C}-$*diffbar in* $\xi \in B_r(0)$

$\Longrightarrow n(\xi) = \int_\gamma \frac{dz}{z-\xi}$ $\mathbb{C}-$*diffbar auf* $B_r(0)$ *und* $n'(\xi) = \int_\gamma \frac{dz}{(z-\xi)^2} = \int_\gamma dz \frac{1}{\xi - z} = 0$

$\Longrightarrow \frac{\partial n}{\partial \xi} = 0 = \frac{\partial n}{\partial \bar{\xi}}$ *da* n $\mathbb{C}-$*diffbar*

$\Longrightarrow n$ *konstant* $\Longrightarrow n \equiv 2\pi i$

□

Kapitel 3

Hauptsätze der Funktionentheorie

3.1 Cauchy'sche Integralformel

Satz 3.1.1. *Cauchy'sche Integralformel (CIF)*
$f \in \mathcal{O}(D)$, $o \in D$, $r > 0$ beliebig, so dass $B_r[o] \subset D$

$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-o|=r} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)}{w-z}dw \ \forall z \in B_r(o)$

Beweis :

$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$

$g \in \mathcal{C}(D)$, da f $\mathbb{C}-$diffbar in z, $g \in \mathcal{O}(D\backslash\{z\})$ da f $\mathbb{C}-$diffbar in $D\backslash\{z\}$

$\Longrightarrow 0 = \int_{\partial B_r(o)} g(w)dw$ wegen Cauchy-Integralsatz für Kreise

$\int_{\partial B_r(o)} g(w)dw = \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw =$

$\int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{\partial B_r(o)} \frac{f(z)}{w-z}dw = \int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_{\partial B_r(o)} \frac{dw}{w-z} = 0$

$\Longrightarrow \int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)\int_{\partial B_r(o)} \frac{dw}{w-z} = f(z) \cdot 2\pi i$

□

Satz 3.1.2. *Cauchy-Integralformel für n* $\quad (CIF)_{n\geq 0}$

$f \in \mathcal{O}(D)$, $f \in \mathcal{C}^1(D) \Longrightarrow f \infty-$oft $\mathbb{C}-$diffbar und

$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}} \forall z \in B_r(o)$ *mit* $B_r[o] \subset D$

Beweis durch Induktion:

$n = 1 \;\; f^{(n)} = f$ Beh. ist Cauchy-Integralformel

$n \to (n+1)$ Sei f n-fach komplex diffbar und es gelte die Beh. für n

$g : B_r(0) \times \partial B_r(0) \longrightarrow \mathbb{C}; g(z,w) := \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$ ist stetig und wohldefiniert

$g(-,w) \in \mathcal{O}(B_r(0))$ und $\frac{\partial g(z,w)}{\partial z} = \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}(n+1)$ stetig auf $B_r(0) \times \partial B_r(0)$

Ind.Vor.$\Longrightarrow f^{(n)} = n! \int_{\partial B_r(o)} g(z,w)dw \cdot \frac{1}{2\pi i}$ $\mathbb{C}-$diffbar in $z \in B_r(o)$ und

$f^{(n+1)}(z) = (f^{(n)})'(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(o)} \frac{\partial g}{\partial z}(z,w)dw =$

$\frac{n!}{2\pi i} \int_{B_r(o)} \frac{(n+1)f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{B_r(o)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw$

□

Bemerkung 3.1.3. *$f \infty-$oft komplex diffbar auf D, obwohl $(CIF)_n$ nur für Kreise gilt, denn Diffbarkeit ist eine lokale Eigenschaft.*

3.2 Folgerungen aus CIF für Kreise

Satz 3.2.1. *Morera, Umkehrung des CIS*

f stetig auf D, fdz lokal integrabel $\Longrightarrow$ f holomoroph

Beweis : Sei $z \in D \Longrightarrow z \in U \underset{\text{offen}}{\subset} D$

f lokal intbar $\Longrightarrow \exists\, g \in \mathcal{C}^1(U;\mathbb{C})$ Stammfunktion, d.h. $dg = \frac{\partial g}{\partial z}dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$

$\Longrightarrow f = \frac{\partial g}{\partial z}, 0 = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$

Cauchy-Riemann $\Longrightarrow g\,\mathbb{C}$-diffbar, $(CIF_{n=2} \Longrightarrow g$ 2-mal diffbar)

$\Longrightarrow f = \frac{\partial g}{\partial z} = g'\,\mathbb{C}-$diffbar

$\Longrightarrow f \in \mathcal{O}(D)$ □

Folgerung 3.2.2. *Es gibt keine holomorphe Wurzel n-te auf $\mathbb{C}^\times$, das heisst es gibt kein $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ mit $f(z)^n = z\,\forall z \in \mathbb{C}^\times$, $n \geq 2$*

Beweis : Annahme: $\exists\, f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$, $f(z)^n = z \Longrightarrow |f(z)| = |z|^{\frac{1}{n}}$

$$h(z) := \begin{cases} f(z) & z \in \mathbb{C}^\times \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

$h \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$, denn $\lim_{z_n \to 0} |z_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ und $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ nach Voraussetzung

$\Longrightarrow \int_\Delta hdz = 0 \forall\, \Delta \subset \mathbb{C}$

Da $\mathbb{C}$ konvex, folgt aus dem 2. Integrabilitätssatz: hdz (lokal) integrabel

$hdz = dg \Longrightarrow h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $h|_{\mathbb{C}^\times} = f \Longrightarrow h' \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nach $(CIF)_{n=1}$

$\Longrightarrow \forall\, z \in \mathbb{C}^\times : 1 = (id)'(z) = (f^n)'(z) = n \cdot f^{n-1}(z) \cdot f'(z)$

andererseits: $\lim_{z\to 0} f'(z) = h'(0)$, $\lim_{z\to 0} f^{(n-1)}(z) = 0$

$\Longrightarrow 1 = \lim_{z\to 0} f'(z) f^{n-1}(z) = 0$ Widerspruch

$\square$

Die komplexe Wurzel mit eingeschränktem Definitionsbereich wurde in den Übungen definiert.

Satz 3.2.3. *Cauchy's Ungleichungen*
$f \in \mathcal{O}(D)$, $o \in D$, $B_r[o] \subset D \Longrightarrow \frac{|f^{(n)}(o)|}{n!} \leq \frac{1}{r^n} \sup_{\partial B_r(0)} |f|$

Beweis : In $(CIF)_n$ setze $z = o$

$\Longrightarrow \frac{f^{(n)}(o)}{n!} = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)dw}{(w-o)^{n+1}} \right| =$

$= |\frac{1}{2\pi i}| \left| \int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)dw}{(w-o)^{n+1}} \right|$

$\leq \frac{1}{2\pi} l(\partial B_r(o)) \cdot \sup_{\partial B_r(o)} \frac{|f(w)|}{|w-o|^{n+1}}$

$= \frac{1}{r^n} \sup_{\partial B_r(o)} |f(w)|$

$\square$

Definition 3.2.4. *Randabstand*
$o \in D$, $dist(o, D) := \inf\{|z-o| : z \in \partial D\} \leq +\infty$

$D = \mathbb{C} \Longleftrightarrow dist(o, D) = \infty$

Satz 3.2.5. *Cauchy-Ungleichung für beschränkte holomorphe Funktionen*
$f \in \mathcal{O}(D)$ *beschränkt,* $o \in D \Longrightarrow \frac{|f^{(n)}(o)|}{n!} \leq \frac{1}{dist(o,\partial D)^n} \cdot \sup_D |f|$

Beweis : Sei $r < dist(o, \partial D)$ beliebig $\Longrightarrow B_r[o] \subset D$ Aus der Cauchy-Ungleichung folgt:
$\left|\frac{f^{(n)}(o)}{n!}\right| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{\partial B_r[o]} |f| \leq \frac{1}{r^n} \sup_D |f|$ unabhängig von r

wähle $r_n \to dist(o, \partial D) \Longrightarrow \frac{1}{r^n} \to \frac{1}{dist(o,\partial D)^n} \Longrightarrow \frac{|f^{(n)}(o)|}{n!} \leq \frac{1}{dist(o,\partial D)^n} \sup_D |f|$ $\square$

Corollar 3.2.6. *Liouville*
$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *beschränkt* $\Longrightarrow f$ *konstant*

Beweis : $z \in \mathbb{C} \Longrightarrow |f'(z)| \leq \frac{1}{dist(z,\partial\mathbb{C})} \sup_{\mathbb{C}} |f| = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = f' = 0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ auf $\mathbb{C}$

$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$ auf $\mathbb{C}$

MWS $\Longrightarrow f$ konstant $\square$

Der Satz von Weierstrass

Definition 3.2.7. *Topologie der kompakten Konvergenz auf* $\mathcal{C}(D, \mathbb{C}) =: \mathcal{C}(D)$. *Sei* $K \subset D$ *kompakte Teilmenge.*

$p_K(f) := \sup_K |f|$ *die zu* K *gehörende Halbnorm, d.h.* $p_K(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$ *gilt im Allgemeinen nicht.*

$\mathcal{C}(D) \ni f_j \underset{kpkt}{\longrightarrow} f \in \mathcal{C}(D) \Longleftrightarrow \forall K \subset D : p_K(f_j - f) \to 0$

$\mathcal{C}(D) \ni f_j \underset{\|\cdot\|_{\infty,D}}{\longrightarrow} f \in \mathcal{C}(D) \Longleftrightarrow \|f - f_j\|_{\infty,D} \to 0$

Satz 3.2.8. *Weierstrass 1*

$\mathcal{O}(D) \underset{abg.}{\subset} \mathcal{C}(D)$, *d.h.:*

$\mathcal{O}(D) \ni f_j \underset{kpkt}{\longrightarrow} f \Longrightarrow f \in \mathcal{O}(D)$

Beweis : Sei $o \in D$, $B_r[o] \subset D \Longrightarrow B_r[o]$ kompakt und $\partial B_r[o]$ kompakt

$\Longrightarrow f_j \underset{\partial B_r(o)}{\longrightarrow} f$

$\Longrightarrow \frac{f_j}{id-z} \underset{\partial B_r(o)}{\longrightarrow} \frac{f}{id-z} \, \forall z \in B_r(o)$

$\Longrightarrow f(z) = \lim_j f_j(z) =^{(CIF)_0} \lim_j \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(o)} \frac{f_j(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)dw}{w-z}$
$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)dw}{w-z} \, \forall z \in B_r(o)$

$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)dw}{w-z}\mathbb{C}-$diffbar in z wegen $\mathbb{C}-$diffbarkeit des Integrals $\Longrightarrow f\,\mathbb{C}-$diffbar auf $B_r(o)$, also auf D, da o bel. □

Satz 3.2.9. *Weierstrass 2*
$\frac{\partial}{\partial z} : \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathcal{O}(D)$, $f \mapsto f'$ *ist linear und stetig*

Bemerkung 3.2.10. *Äquivalent zu Weierstrass 2 sind folgende Aussagen:*

1. $\forall$ *kompakte*$K \subset D \exists$ *kompakte Teilmenge*$L \subset D$ *so dass* $\forall f \in \mathcal{O}(D) : p_k(\frac{\partial f}{\partial z}) \leq c \cdot p_L(f)$
2. $\mathcal{O}(D) \ni f_j \underset{kpkt}{\longrightarrow} f \in \mathcal{O}(D) \Longrightarrow \frac{\partial f_j}{\partial z} \underset{kpkt}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial z}$

Beweis des Satzes: Sei $K \subset D$ kompakt $\Longrightarrow R := dist(K, \partial D) > 0$, da dist stetig und auf K Minimum annimmt.

Sei $0 < r < R$. $L := \{z \in D : dist(z, K) \leq r\} \subset D$ ist kompakt.

Sei $f \in \mathcal{O}(D)$, $o \in K \Longrightarrow B_r[o] \subset L \Longrightarrow |f'(o)| \leq \frac{1}{r} \sup_{\partial B_r(o)} |f| \leq \frac{1}{r} \sup_L |f|$

Da $o \in K$ beliebig: $p_K(f') \leq \frac{1}{r} sup_L|f| = \frac{1}{r} p_L(f)$

Mit $c := \frac{1}{r}$ folgt Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial z}$ im Sinne der Halbnormen □

Beweis der Bem.:

Sei $f_j \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow} f$

$zz : \frac{\partial f_j}{\partial z} \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial z}$

Aus dem Beweis des Satzes folgt: $\exists L \subset D$ kompakt, $c \in \mathbb{R}^+ : \forall g \in \mathcal{O}(D) : p_K(g') \leq c \cdot p_L(g)$ Setze $g := f_j - f \in \mathcal{O}(D) \Longrightarrow p_K(f_j' - f') = p_K(g') \leq cp_L(g) = cp_L(f_j - f) \to 0 \Longrightarrow p_K(f_j' - f') \to 0$. Da K beliebig $\Longrightarrow f_j' \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow} f'$

□

3.3 Potenzreihen

Definition 3.3.1. *Potenzreihe*
Zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Koeffizienten, ist

$\sum_{n\geq 0} a_n(z-o)^n$ *die Potenzreihe um $o \in \mathbb{C}$*

Beispiel 3.3.2. $p \in \mathbb{C}[z]$ *Polynom* $\Longrightarrow p = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \sum_{j=N+1}^{\infty} 0 \cdot z^j$ *(endliche) Potenzreihe*

Beispiel 3.3.3. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$, $|z| < 1$

Satz 3.3.4. *Cauchy-Hadamard-Abel*
Sei $\mathbb{C} \supset (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Koeffizienten $\frac{1}{R} := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \in [0, +\infty]$ (größter Häufungspunkt) R heisst dann Konvergenzradius.

Dann gilt:

1. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *konvergiert absolut und kompakt auf $B_R(0)$*
2. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *divergiert auf $\mathbb{C}\backslash B_R[0]$*
3. *keine Aussage auf $\partial B_R[0]$*

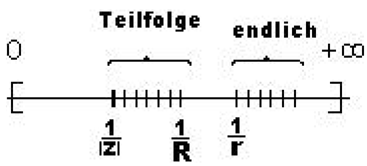
Beweis :

1. $D = B_R(0)$, wobei für $R = \infty$ $B_\infty(0) = \mathbb{C}$ gilt.

   Zu zeigen: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow}$ auf D (Cauchy-Folge)

   Sei $K \subset D$ kompakt $\Longrightarrow \exists\, 0 < \rho < R$, $K \subset B_\rho[0]$. Sei $\rho < r < R \Longrightarrow \frac{1}{r} > \frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow \exists\, m_0 : \forall m \geq m_0 : \sum_{n\geq m_0} |a_n z^n| = \sum_{n\geq m_0} |a_n||z|^n \leq \sum_{n\geq m_0} |a_n|\rho^n = \sum_{n\geq m_0} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n = \left(\frac{\rho}{r}\right)^m \sum_{n\geq m_0} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-m} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^m \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{\rho}{r}\right)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

   Also gilt absolute Konvergenz wegen Cauchy-Kriterium für Reihen und $\sum_{n\geq m} |a_n z^n| \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow} 0$



2. Sei $0 \leq R < \infty$, $z \in \mathbb{C}\backslash B_R[0] \Longrightarrow |z| > R \Longrightarrow \frac{1}{|z|} < \frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ (größter Häufungspunkt) $\Longrightarrow \exists$ Teilfolge mit $\frac{1}{|z|} \leq |a_{\pi(n)}|^{\frac{1}{\pi(n)}}$
   $\Longrightarrow |z^{\pi(m)} a_{\pi(m)}| = |z|^{\pi(m)} |a_{\pi(m)}| = \left[|z| \cdot |a_{\pi(m)}|^{\frac{1}{\pi(m)}}\right]^{\pi(m)} \geq 1$
   $\Longrightarrow z^{\pi(m)} a_{\pi(m)}$ keine Nullfolge
   $\Longrightarrow \sum a_n z^n$ divergent

□

Corollar 3.3.5. $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *mit Konvergenzradius* $\infty \geq R_K > 0$ *Dann gilt:*

1. $f \in \mathcal{O}(B_{R_K}(0))$
2. $\forall k \in \mathbb{N}$ *hat die Reihe* $f_k(z) = \sum_{n\geq k} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1) z^{(n-k)}$ *den Konvergenzradius* R_K
3. $f_k \in \mathcal{O}(B_{R_K}(0))$
4. $f_k(z) = f^{(k)}(z)\, \forall z \in B_R(0)$

Beweis :

1. $s_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, $K \subset B_R(0)$ kompakt $\exists R' < R$ mit $K \subset B_{R'}(0)$
   $|f(z) - s_N(z)| = |\sum_{n\geq N+1} a_n z^n| \leq \sum_{n\geq N+1} |a_n| \cdot |z|^n \leq \sum_{n\geq N+1} |a_n| R'^n \to 0$ für $N \to \infty$ (unabhängig von z) Cauchy-Kriterium $\Longrightarrow s_N \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow} f$ auf $B_R(0)$ mit Weierstrass
   $\Longrightarrow f$ holomorph, da s_N holomorph $\Longrightarrow 1$
2. $f_k = (f_{k-1})_1$, deshalb Œ$k = 1$, allgemein durch Induktion $f_1(z) = \sum_{n\geq 1} a_n n z^{n-1}$ $|a_n \cdot n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \Longrightarrow \limsup |a_n \cdot n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R_k} \Longrightarrow f_1$ hat selben Konvergenzradius $\Longrightarrow 2$
3. analog zu 2
4. $\underbrace{s_N^{(k)}(z)}_{\to f^{(k)}(z) \text{ (Weierstrass 2)}} = \sum_{n=k}^{N} a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) z^{n-k} \to f_n(z)$

□

Beispiel 3.3.6. *Geometrische Reihe*
Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} z^n$, *also* $a_n = 1\, \forall n$
$\Longrightarrow \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1 \Longrightarrow R = 1 \Longrightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n \in \mathcal{O}(B_1(0))$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$

Beispiel 3.3.7. *Zweig des Logarithmus*
$f(z) := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$, *Potenzreihe um* $o = 1$ *mit* $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n}} = 1 \Longrightarrow R = 1$

für $|z-1| < 1$*:*

$f'(z) = \frac{\partial}{\partial z}\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{\partial}{\partial z}(z-1)^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} n(z-1)^{n-1} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}(z-1)^{n-1} = \sum_{m\geq 0}(-1)^m(z-1)^m = \sum_{m\geq 0}(1-z)^m = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}$

Wegen $f' = \frac{1}{id}$ *nennt man* f *Zweig des Logarithmus*

3.4 Taylorentwicklung holomorpher Funktionen

In 3.3 wurde gezeigt, dass jede Potenzreihe in ihrem Konvergenzbereich holomorph ist. Umgekehrt gilt aber auch, dass sich jede holomorphe Funktion in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

Satz 3.4.1. *Taylorreihe*

Sei $\mathbb{C} \supset D$ *Gebiet,* $f \in \mathcal{O}(D)$*,* $o \in D$ *und* $r > 0$ *so, dass* $B_r[o] \subset D$*. Es gilt nach* $(CIF)_{n\geq 0}$ *:*
$\forall n \geq 0 : \frac{f^{(n)}(o)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)dw}{(w-o)^{n+1}}$

Sei $R := dist(o, \partial D) = \inf\{|w-z| : w \in \partial D\}$

Dann gilt:

$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(o)}{n!}(z-o)^n$ *kompakte Konvergenz auf* $B_R(o)$

Beweis : Sei $K \subset B_R(o) \subset D$ kompakt

$\Longrightarrow \exists\, 0 < \rho < r < R$, so dass $K \subset B_\rho[o]$, $B := B_r(o) \subset \bar{B} \subset D$

Sei $z \in K$, $w \in \partial B \Longrightarrow \frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-o}(1 - \frac{(z-o)}{w-o})^{-1}$ (nachrechnen)

$\Longrightarrow \frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-o}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-o}{w-o}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(z-o)^n}{(w-o)^{n+1}}$

Sei $N \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow |f(z) - \sum_{n\leq N-1} f^{(n)}(o)\cdot\frac{(z-o)^n}{n!}|$

wegen $(CIF)_{0,n\geq 0} = |\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(w)dw}{w-z} - \sum_{n\leq N-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(w)dw}{(w-o)^{n+1}}(z-o)^n|$

$= |\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} f(w)\left[\frac{1}{w-z} - \sum_{n\leq N-1}\frac{(z-o)^n}{(w-o)^{n+1}}\right]dw|$

$= |\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} f(w)\sum_{n\geq N}\frac{(z-o)^n}{(w-o)^{n+1}}dw| \leq \frac{1}{2\pi}l(\partial B)\cdot\sup\cdots \leq \frac{1}{2\pi}2\pi r\cdot\sup_{\partial B}|f|\sum_{n\geq N}\frac{|z-o|^n}{|w-o|^{n+1}}$

$\leq \sup_{\partial B}|f|\sum_{n\geq N}(\frac{\rho}{r})^n = \sup_{\partial B}|f|\frac{(\frac{\rho}{r})^N}{1-\frac{\rho}{r}} \to 0$ für $N \to \infty$

$\Longrightarrow \sum \frac{f^{(n)}(o)}{n!}(z-o)^n \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow} f(z)$ auf $B_R(0)$, da $K \subset B_R(0)$ beliebig.

$\square$

Corollar 3.4.2. *$f \in \mathcal{O}(D) \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(o)}{n!}(z-o)^n$ hat Konvergenzradius $R \geq dist(o, \partial D)$*

Beispiel 3.4.3. $f(z) = exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \Longrightarrow f^{(n)}(z) = exp(z)\, \forall n \geq 0$ $D = \mathbb{C}$, $R = +\infty$, $o = 0 \Longrightarrow exp(z) = e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$

Beispiel 3.4.4. $e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$, $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$. *Deshalb wird folgende Definition plausibel:*

$\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$\cos$ *und* $\sin$ *sind offensichtlich holomorph.*

Für die Reihendarstellung folgen 2 Beweise

Beh.:

$\cos(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $R = +\infty$

$\sin(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $R = +\infty$

Beweis über Berechnung der Ableitung: $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$

$$\Longrightarrow \cos^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\text{und } \sin^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ *Beh.* $\square$

Beweis über Betrachtung der Summanden: $e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \Longrightarrow$

1. $e^{iz} = \sum_{n\geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{i^n z^n}{n!}$
2. $e^{-iz} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-iz)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}$

berechne 1.+2. und 1.-2., betrachte Summanden, die wegfallen.

$\square$

Beispiel 3.4.5. $a \in \mathbb{C}^\times$, $|a| > 0$, $D = \mathbb{C}\backslash\{a\}$, $f(z) := \frac{1}{z-a} \in \mathcal{O}(D)$

Entwicklung um $o = 0 \in D$

$dist(o, \partial D) = dist(0, a) = |a| \Longrightarrow R = |a|$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} -\frac{1}{a^{n+1}} z^n$ *kompakte Konvergenz auf* $B_{|a|}(0)$

Beweis über Berechnung der Ableitungen: $f'(z) = -\frac{1}{(z-a)^2}$, $f^{(n)}(z)$ durch Iteration $\Longrightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{a^{n+1}} \Longrightarrow$ Beh. $\square$

Beweis wieder Betrachtung der Summanden:

$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(1-\frac{z}{a})(-a)} =$

$-\frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n\geq 0} -\frac{1}{a^{n+1}}z^n$, kompakte Konvergenz auf $B_R(0) = B_{|a|}(0)$ □

Beispiel 3.4.6. $log(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$

$log'(z) = \frac{1}{z} \Longrightarrow log^{(n)}$ *durch Iteration* $\frac{log^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (n \geq 1)$

3.5 Identitätssatz und Maximumsprinzip

Satz 3.5.1. *Schwacher Identitätssatz*
$f \in \mathcal{O}(D),\ D \underset{offen}{\supset} U \neq \emptyset,\ f|_U = 0 \Longrightarrow f = 0$

Beweis : $N := \{o \in D : \forall n \geq 0 :\ f^{(n)}(o) = 0\}$

$D \underset{\text{abg.}}{\supset} N$

da $N = \bigcap_{n\geq 0}\underbrace{Kern f^{(n)}}_{\text{abg.}}$

Beh.: $N \neq \emptyset$ denn $U \subset N$

Bew.: Sei $o \in U$, $f|_U \in \mathcal{O}(U)$, $f|_U = 0$ Potenzreihenentwicklung von f auf U um o

$\Longrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(o)}{n!} = 0\,\forall\, n \Longrightarrow o \in N$

$N \underset{\text{offen}}{\subset} D$

Sei $o \in N$, $r = dist(o, \partial D) \Longrightarrow f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(o)}{n!}(z-o)^n$

Da $o \in N \Longrightarrow f^{(n)}(o) = 0\,\forall n \geq 0$

$\Longrightarrow f(z) = 0\forall\, z \in B_r(o)$, $B_r(o) \subset N$ wegen $f^{(n)}(z) = 0\,\forall n, \forall z \in B_r(o)$ Also $N \underset{\text{offen}}{\subset} D$

Da D als Gebiet zusammenhängend folgt $N = D \Longrightarrow f = 0$ □

Corollar 3.5.2. *D Gebiet $\Longrightarrow \mathcal{O}(D)$ Integritätsring $\Longrightarrow \exists$ Quotientenkörper $\mathcal{U}(D)$, Menge der meromorphe Funktionen*

Beweis : $\mathcal{O}(D)$ nullteilerfrei

$\mathcal{O}(D) \ni f, g$ mit $f \cdot g = 0$

Sei $f \neq 0, zz : g = 0 \Longrightarrow \exists\, o \in D$ mit $f(o) \neq 0 \Longrightarrow \exists D \underset{\text{offen}}{\supset} U \ni o$ mit $f(U) \not\ni 0$

Da $\mathbb{C}$ Integritätsbereich $\Longrightarrow g|_U = 0 \Longrightarrow g = 0$ wegen des schwachen Identitätssatzes □

Satz 3.5.3. *Starker Identitätssatz*
$f \in \mathcal{O}(D),\ f \neq 0 \Longrightarrow f^{-1}(\{0\})$ *diskrete Teilmenge von D*

Beweis :

Sei $o \in D$, $R = dist(o, \partial D) \Longrightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(o)}{n!}(z-o)^n$ kompakt auf $B_R(0)$

Da $f \neq 0 \Longrightarrow f|_{B_R(0)} \neq 0 \Longrightarrow \exists m \geq 0$ mit $f^{(m)}(o) \neq 0$

Sei m_0 Minimum mit $f^{(m_0)}(o) \neq 0$

Setze $h(z) := \sum_{n \geq m_0} f^{(n)}(o) \frac{1}{n!}(z-o)^{n-m_0} \Longrightarrow h \in \mathcal{O}(B_R(o))$, also h stetig auf $B_R(o)$ und $h(o) = 0$

$\Longrightarrow \exists\, U$ mit $D \supset B_R(o) \underset{\text{offen}}{\supset} U \ni o$ so dass $\sup_{z \in U} |h| < \frac{|f^{(m)}(o)|}{m!}$

Sei $z \in U \backslash \{o\}$. Dann gilt $f(z) = \sum_{n \geq m_0} \frac{f^{(n)}(o)}{n!}(z-o)^n = (z-o)^m \sum_{n \geq m} \frac{f^{(n)}(o)}{n!}(z-o)^{n-m}$ $= (z-o)^m \left[\frac{f^{(m)}(o)}{m!} + h(z)\right]$

$\Longrightarrow |f(z)| = |z-o|^m \left|\frac{f^{(m)}(o)}{m!} + h(z)\right| \geq |z-o|^m \left(\left|\frac{f^{(m)}(o)}{m!}\right| - |h(z)|\right) > 0$

$\Longrightarrow f(z) \neq 0 \Longrightarrow f|_{U \backslash \{o\}}$ hat keine Nullstelle,
d.h. $U \cap f^{-1}(\{0\}) \subset \{o\} \Longrightarrow f^{-1}(\{0\})$ diskret in D □

Satz 3.5.4. *Maximumsprinzip 1.Version oder Satz von der Gebietstreue*

$f \in \mathcal{O}(D)$, $f \neq const. \Longrightarrow f$ offene Abbildung d.h. $U \underset{\text{offen}}{\subset} D \Longrightarrow f(U) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}$

'Das holomorphe Bild eines Gebietes ist wieder ein Gebiet'

Beweis : Sei $U \underset{\text{offen}}{\subset} D$, zz.: $f(U) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \Longleftrightarrow \forall b \in f(U) \exists\, \varepsilon > 0 : B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) \subset f(U)$

Sei $b \in f(U) \Longrightarrow \exists\, o \in U$ mit $b = f(o)$ Da U offen $\Longrightarrow \exists r > 0$, $B_r(o) \subset U$

schw. Id.-Satz $\Longrightarrow f|_{B_r(o)}$ nicht konstant

starker Id.-Satz $\Longrightarrow f - b$ hat isolierte Nullstelle auf $B_r(o)$

$\Longrightarrow \exists\, 0 < \rho < r$ mit $\inf_{\partial B_\rho(o)} |f - b| =: \varepsilon > 0$

□

Satz 3.5.5 (Maximumprinzip für Abbildung 'map'). $\mathbb{C} \supset D$ *Gebiet,* $f \in \mathcal{O}(D) \backslash \mathbb{C} \Longrightarrow$ $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *offene Abbildung.*

Beweis : Sei $U \subset D$ offen, $b \in f(U) \Longrightarrow b = f(o), o \in U \Longrightarrow f - b$ hat isolierte Nullstellen (starker Id-Satz)
$\Longrightarrow \exists B_r[o] \subset U, inf_{\partial B_r[o]} |f - b| = \varepsilon > 0$

Beh.: $f(U) \supset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$
Sei $w \in \mathbb{C} \backslash f(U), \varphi(z) := \frac{1}{f(z) - w} \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{O}(U)$ Falls $|w - b| < \varepsilon, z \in \partial B_r(o)$
$\Longrightarrow |f(z) - w| + |w - b| \geq |f(z) - b| \geq \varepsilon$
$\Longrightarrow \frac{1}{|\varphi(z)|} = |f(z) - w| \geq \varepsilon - |w - b| > 0$
$\Longrightarrow \frac{1}{|w-b|} = \frac{1}{|w - f(o)|} = |\varphi(o)| \leq \sup_{\partial B_r(o)} |\varphi(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon - |w-b|}$ wegen der Cauchy-Ungleichung für $n = 0$, die lautete: $\frac{|f^{(n)}(o)|}{n!} \leq \frac{1}{r^n} sup_{\partial B_r(o)} |f(w)|$

Also: $w \in \mathbb{C} \setminus f(U) \Longrightarrow \frac{1}{|w-b|} \leq \frac{1}{\varepsilon - |w-b|}$
$\Longrightarrow \varepsilon - |w-b| \leq |w-b|$
$\Longrightarrow \varepsilon \leq 2|w-b| \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{2} \leq |w-b| \Longrightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) \subset f(U) \Longrightarrow f(U)$ offen

□

Satz 3.5.6 (Maximumprinzip für Funktionen). *$\mathbb{C} \supset D$ Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$*
Angenommen $\exists o \in D$ mit $|f(o)| = sup_D|f| \Longrightarrow f$ konstant
'Holomorphe Funktionen haben kein Maximum im Inneren'

Beweis : Zeige: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+, z \mapsto |z|$ ist offen.

Sei $U \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}, |U| := \{|z|, z \in U\} \Longrightarrow \exists z \in U, x = |z|$
$\Longrightarrow \exists r > 0, B_r(z) \subset U$
$\Longrightarrow |U| \supset |B_r(z)| =]|z| - r, |z| + r[\cap \mathbb{R}_+ =]x - r, x + r[\cap \mathbb{R}_+ \ni x \Longrightarrow |U|$ Umgebung von x

Annahme: f nicht konstant $\Longrightarrow f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ offen
$D \longrightarrow^f \mathbb{C} \longrightarrow^{|\cdot|} \mathbb{R}_+$ ebenfalls offen.
$\Longrightarrow |f(D)| \subset \mathbb{R}_+$ offenes Intervall bzgl. $\mathbb{R}_+$
$\Longrightarrow sup|f(D)| = |f(o)|$ rechter Endpunkt, Widerspruch !
$\Longrightarrow f$ konstant

□

Definition 3.5.7 (Algebra). *$D \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet*
$A(D) := \{f \in \mathcal{C}(\bar{D}) : f|_D \in \mathcal{O}(D)\} = \mathcal{C}(\bar{D}) \cap \mathcal{O}(D)$

Satz 3.5.8. $f \in A(D) \Longrightarrow sup_{\overline{D}}|f| = sup_{\partial D}|f|$

Beweis : Sei $o \in \overline{D} \Longrightarrow |f(o)| = sup_{\overline{D}}|f|$, $\overline{D}$ kompakt, $|f|$ stetig

1. Fall: $o \in \partial D \Longrightarrow sup_{\overline{D}}|f| = sup_{\partial D}|f|$

2. Fall $o \in D \Longrightarrow f$ konstant auf D (Max.-Prinzip) $\Longrightarrow f$ konstant auf $\overline{D}$, denn f stetig
$\Longrightarrow sup_{\overline{D}}|f| = |c| = sup_{\partial D}|f|$

□

Zusammenschau Funktionenalgebren:

$\mathcal{C}(D) \supset \mathcal{O}(D) \supset \mathbb{C}[z] \supset \mathbb{C}z^0$

D beschränkt:

$\mathcal{C}(D) \supset \mathcal{O}(D) \supset A(D) \supset \mathbb{C}[z] \supset \mathbb{C}z^0$

Kapitel 4

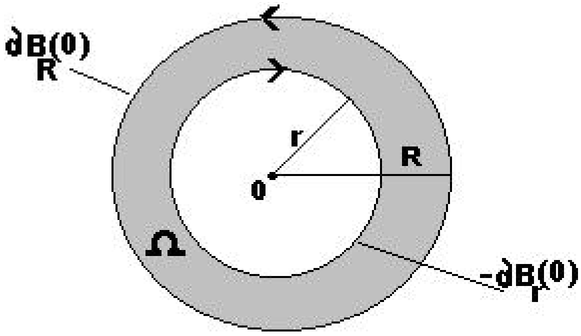
Globale Funktionentheorie

4.1 Homologie-Version der Cauchy-Integralformel

Sei $\mathbb{C} \supset D$ Gebiet, $\gamma : I \longrightarrow D$ stückweise glatte Kurve, geschlossen, $o \in \mathbb{C} \backslash S_\gamma \Longrightarrow Ind_o \gamma \in \mathbb{Z}$ (Windungszahl, siehe 2.4.3)

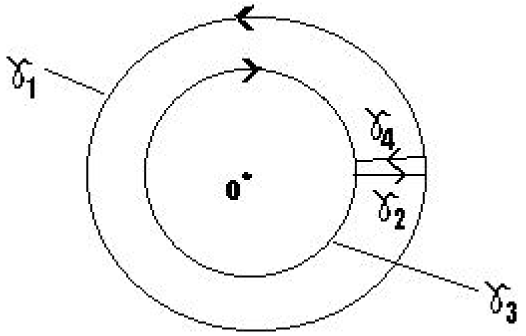
Definition 4.1.1. *$\mathbb{C} \supset D$ Gebiet.*

γ 1-Zykel $\Longleftrightarrow \gamma = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i$ wobei $a_i \in \mathbb{Z}$, γ_i geschlossene stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurven.



Beispiel 4.1.2.

1. *γ geschlossene Kurve $\Longrightarrow \gamma$ 1-Zykel*
2. *$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$ Kreisring. Dann ist $\partial\Omega = \partial B_R(0) - \partial B_r(0)$ im Sinne der Kurvenaddition*



3. $\partial\Omega = \partial B_R(0) - \partial B_r(0) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_3 + (\gamma_2 - \gamma_2)$

4. $3 \cdot \partial B_1(0) = \partial B_1(0) + \partial B_1(0) + \partial B_1(0)$ *(3 mal durchlaufen)*

Definition 4.1.3. $\gamma = \sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i$ *1-Zyklus*

$S_\gamma = \bigcup_i \{S_{\gamma_1} : a_i \neq 0\}$ *sei die Spur von* γ

$T_\gamma = \{o \in \mathbb{C}\backslash S_\gamma : Ind_o\gamma \neq 0\}$ *sei das Innere von* γ *wobei* $Ind_o\gamma := \sum_i a_i Ind_o\gamma_i \in \mathbb{Z}$

Beispiel 4.1.4. Ω *Kreisring, offen,* $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$,
$\partial\Omega = \partial B_R(0) - \partial B_r(0)$ *1-Zykel Beh.:* $T_{\partial\Omega} = \Omega$, $S_{\partial\Omega} = \partial\Omega$ *Beweis Skizze:*

$Ind_z\partial B_r(0) = 1$ *für* $|z| < r$ *und 0 für* $|z| > r$, $z \notin \partial\Omega$

$$\Longrightarrow Ind_z\partial\Omega = Ind_z\partial B_R(0) - Ind_z\partial B_r(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } R < |z| \\ 1 & \text{für } r < |z| < R \\ 0 & \text{für } |z| < r \end{cases}$$

□

Proposition 4.1.5. S_γ *kompakt.*

Beweis : S_γ ist endliche Vereinigung von Kompakta □

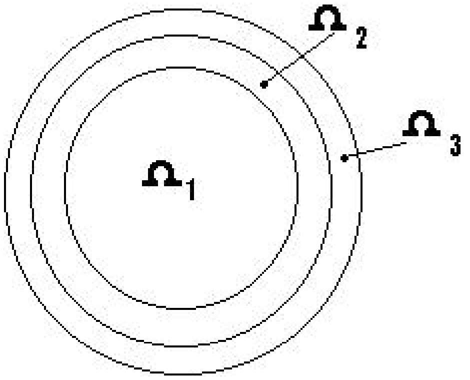
Corollar 4.1.6. $\mathbb{C}\backslash S_\gamma$ *offen, da* S_γ *kompakt.*

Beispiel 4.1.7. $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \big| r \leq |z| \leq R\}$ *abgeschlossener Kreisring*
$\Longrightarrow \partial\Omega = \partial B_R(0) \cup \partial B_r(0)$ *kompakt.*
1-Zykel $\vec{\partial\Omega} = \partial B_{\vec{r}}(0) - \partial B_{\vec{r}}(0)$, *d.h.* $a_1 = 1$, $a_2 = -1$
Dann gilt: $S_{\vec{\partial\Omega}} = S_{\partial B_{\vec{r}}(0)} \cup S_{\partial B_{\vec{R}}(0)} = \partial B_r(0) \cup B_R(0) = \partial\Omega$ *Man sagt:* $\vec{\partial\Omega}$ *ist der orientierte Rand von* Ω.

Speziell: $0 = r < R < \infty \Longrightarrow \Omega = B_R(0)/\{0\}$ *heisst punktierte Disk. Hier gilt:* $\partial\Omega = \partial B_R(0) \cup \{0\} = S_{\vec{\partial\Omega}}$, *denn:*
$\vec{\partial\Omega} = \partial B_{\vec{R}}(0) - \gamma_2$, $(\gamma_2(t) = 0\,\forall\, t)$

4.1.1 Topologie von $\mathbb{C}\backslash S_\gamma$

Proposition 4.1.8. $\Omega = \dot{\bigcup}_i \Omega_i$ *(endliche Vereinigung)*
wobei die Ω_i *zusammenhängend, offen und nicht leer in* $\mathbb{C}$, *d.h.* Ω_i *sind die Zusammenhangskomponenten von* Ω.

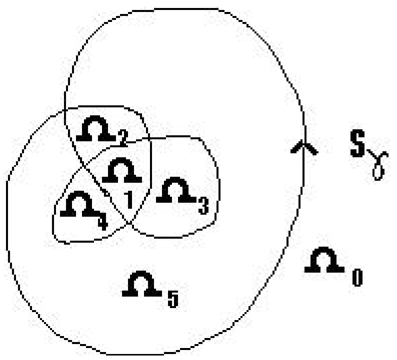


Proposition 4.1.9. *Gibt es ein Kompaktum K mit $\Omega = \mathbb{C}\backslash K$, so hat Ω genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.*

Beweis : K kompakt $\Longrightarrow \exists\, R > 0$ mit $K \subset B_R(0) \Longrightarrow \Omega \supset \underbrace{\mathbb{C}\backslash B_R[0]}_{zsh.} \Longrightarrow \exists$ Zsh.-Komponente Ω_{i_0} von Ω mit $\Omega_{i_0} \supset \mathbb{C}\backslash B_R[0] \Longrightarrow \Omega_{i_0}$ unbeschränkt.
Da Ω_i disjunkt, gilt $\Omega_i \subset B_R[0] \forall\, i \neq i_0 \Longrightarrow \Omega_i$ beschränkt. □

Definition 4.1.10. *Windungszahl eines Zyklus*
γ 1-Zykel, $z \in \mathbb{C}\backslash S_\gamma =: \Omega$
Dann sei $Ind_z\gamma := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \sum_i a_i Ind_z\gamma_i \in \mathbb{Z}$

Satz 4.1.11. *$\mathbb{C}\backslash S_\gamma \ni z \mapsto Ind_z\gamma \in \mathbb{Z}$ ist konstant auf jeder Zusammenhangs-Komponente und verschwindet auf der (eindeutigen) unbeschränkten Komponente.*



Beweis :

$F(z,w) = \frac{1}{w-z} \Longrightarrow F : \mathbb{C}\backslash S_\gamma \times S_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}$

$\Longrightarrow Ind_z\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z,w)dw$ stetig in $z \Longrightarrow Ind_\gamma : \mathbb{C}\backslash S_\gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$ stetig

$\forall i$ gilt $\Omega_i \subset \mathbb{C}\backslash S_\gamma \Longrightarrow \{Ind_z\gamma : z \in \Omega_i\} \subset \mathbb{Z}$ Bildmenge ist zusammenhängend $\Longrightarrow \{Ind_z\gamma : z \in \Omega_i\} = \{k_i\}$ einpunktig $\Longrightarrow Ind_z\gamma = k_i \,\forall\, z \in \Omega_i \Longrightarrow$ Beh (1)

Sei nun Ω_0 unbeschränkt $\Longrightarrow \Omega_0 \supset \mathbb{C}\backslash B_R[0] \Longrightarrow S_\gamma \subset B_R(0) \Longrightarrow |w| < R \,\forall\, w \in S_\gamma$

Sei nun $z \in \mathbb{C}\backslash B_R(0) \Longrightarrow z \in \Omega_0 \Longrightarrow |w-z| = |z-w| \geq |z| - |w| \geq |z| - R \Longrightarrow |Ind_z\gamma| = |\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}| \leq \frac{1}{2\pi} l(\gamma) \sup_{w\in S_\gamma} \frac{1}{|w-z|} \leq \frac{l(\gamma)}{2\pi\cdot(|z|-R)} \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash B_R[0] \subset \Omega_0$

Für $|z| \to \infty \Longrightarrow |Ind_z\gamma| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow Ind_z\gamma = 0 \Longrightarrow Ind_{\Omega_0}\gamma = 0$

$\square$

4.1.2 Homologie

Im folgenden: γ 1-Zykel in Gebiet D

Definition 4.1.12. *(Artin)*

Das Innere von γ
$T(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\backslash S(\gamma) \big| Ind_\gamma(z) \neq 0\}$

Definition 4.1.13. *1-Zykel* γ *ist 1-Rand in* D *oder 0-homolog*

$\Longleftrightarrow T(\gamma) \subset D$

Beispiel 4.1.14. $D = \{z \in \mathbb{C} \big| r < |z| < R\}$ *Kreisring*

1. $r < \rho < R \Longrightarrow \partial \vec{B_\rho}(0)$ *1-Zykel in* D.
   $T_{\partial \vec{B_\rho}(0)} = B_\rho(0) \not\subset D$, *nicht 0-homolog.*
2. $r < \rho_1 < \rho_2 < R \Longrightarrow \partial \vec{B_{\rho_2}}(0) - \partial \vec{B_{\rho_1}}(0)$ *1-Zykel in* D.
   $T_{\partial \vec{B_{\rho_2}}(0) - \partial \vec{B_{\rho_1}}(0)} = \partial \vec{B_{\rho_2}}(0) \backslash \partial \vec{B_{\rho_1}}[0] \subset D$ *null-homolog = 1-Rand.*
   $\partial \vec{B_{\rho_2}}(0) - \partial \vec{B_{\rho_1}}(0) =: \partial \vec{B_{\rho_1,\rho_2}}(0)$
   $B_{\rho_1,\rho_2}(0) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$ *orientierter Kreisring*

Satz 4.1.15. *Homologie-Cauchy-Integralformel*

$D \subset \mathbb{C}$ *Gebiet,* $f \in \mathcal{O}(D)$, γ *null-homolog in* D *(d.h.* γ *1-Rand in* D*)*

$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} = f(z) \cdot Ind_z(\gamma) \quad \forall\, z \in D\backslash S(\gamma)$

Beweis Dixon:

Sei $G(z,w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$

$G : D \times D \longrightarrow \mathbb{C}$, G stetig auf $D \times D \backslash \{(z,z)|z \in D\}$

noch zz: G stetig auf $\{(z,z)|z \in D\}$:
Sei $C \subset D$ konvex,

$\forall\, z, w \in \mathbb{C} : [z,w] \subset C \subset D \Longrightarrow_{\text{MWS}} f(w) - f(z) = \int_0^1 f'(z + t(w-z)) \cdot (w-z)dt$

Sei $w, z \in C$, $z \neq w \Longrightarrow$

$G(z,w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \int_0^1 f'(z+t(w-z))dt$

Für $w = z$: $\int_0^1 f'(z+t(z-z))dt = \int_0^1 f'(z)dt = f'(z) = G(z,z)$

$\Longrightarrow G(z,w) = \int_0^1 \underbrace{f'(z+t(w-z))}_{\text{simultan stetig in } (t,z,w)} dt$

$\Longrightarrow_{\text{Stetigkeit unter dem Integral}}$ G stetig auf $C \times C$

Da C beliebig (konvex) $\Longrightarrow$ G stetig auf allen Diagonalen in $D \times D$ $\Longrightarrow$ G stetig auf $D \times D \Longrightarrow G$ stetig auf $D \times S(\gamma)$

$g(z) := \int_\gamma G(z,w)dw \Longrightarrow g \in \mathcal{C}(D)$

$\Longrightarrow \forall\, w \in S(\gamma) :\ G(\cdot,w) \in \mathcal{C}(D) \cap \mathcal{O}(D\backslash\{w\}) =_{\text{Morera}} \mathcal{O}(D)$

$\Longrightarrow g \in \mathcal{O}(D)$ wegen Holomorphie unter dem Integral

$H(z,w) = \frac{f(w)}{w-z}$ stetig auf $[\mathbb{C}\backslash S(\gamma)] \times S(\gamma)$

$\Longrightarrow h(z) = \int_\gamma H(z,w)dw$ stetig in $\mathbb{C}\backslash S(\gamma)$, holomorph in $\mathbb{C}\backslash S(\gamma)$

da $\forall\, w \in S(\gamma)$ gilt: $H(\cdot,w) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash S_\gamma)$, wobei $\mathbb{C}\backslash S_\gamma$ offen, aber nicht immer Gebiet.

Sei $z \in D \cap (\mathbb{C}\backslash S(\gamma)) = D\backslash S(\gamma)$

$h(z) = \int_\gamma \frac{f(w)dw}{w-z} = \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw + \int_\gamma \frac{f(z)dw}{w-z} = g(z) + f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = g(z) + f(z)2\pi i Ind_\gamma(z)$

Sei nun $z \in D\backslash S(\gamma) \cup T(\gamma)) = D \cap \mathbb{C}\backslash[S_\gamma \cup T_\gamma]$, wobei $[S_\gamma \cup T_\gamma]$ kompakt, also abgeschlossen (s.o.), das Komplement also offen.

Wegen 4.1.2 ist $h(z) = g(z) + 2\pi i f(z) Ind_\gamma(z) = g(z)$, da $z \notin T_\gamma$

$\Longrightarrow h = g$ auf $D \cap (\mathbb{C}\backslash(S_\gamma \cup T_\gamma))$

$\exists\, k \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, so dass $k|_D = g$, $k|_{\mathbb{C}\backslash(S_\gamma \cup T_\gamma)} = h$

Bemerkung 4.1.16. $\mathbb{C} = D \cup (\mathbb{C}\backslash(S_\gamma \cap T_\gamma)$ *wegen* $S_\gamma \cup T_\gamma \subset D$, γ *null-homolog*

$\forall\, R \geq 0 : K_R := \{z \in \mathbb{C} : dist(z, S_\gamma \cup T_\gamma) \leq R\}$

K_R kompakt, da $S_\gamma \cup T_\gamma$ kompakt (beschränkt)

$\forall z \in \mathbb{C}\backslash K_R \subset \mathbb{C}\backslash(S_\gamma \cup T_\gamma)$ gilt

$|k(z)| = |h(z)| = |\int_\gamma \frac{f(w)dw}{w-z}| \leq l(\gamma)\sup_{w \in S_\gamma} \frac{|f(w)|}{|w-z|} \leq l(\gamma)\frac{\sup_{S_\gamma}|f|}{R}$, da $|w-z| \geq dist(z,S_\gamma) \geq dist(z, S_\gamma \cup T_\gamma) > R$

$\Longrightarrow \sup_{\mathbb{C}}|k| = \max(\sup_{K_R}|k|, \sup_{\mathbb{C}\backslash K_R}|k|) \leq \max(\sup_{K_R}|k|, l(\gamma)\frac{\sup_{S_\gamma}|f|}{R}) < \infty$

$\Longrightarrow k$ beschränkt $\Longrightarrow k$ konstant (Liouville)

$\Longrightarrow |k| \leq l(\gamma)\frac{\sup_{S_\gamma}|f|}{R} \longrightarrow 0$ für $R \longrightarrow \infty$

$\Longrightarrow k = 0 \Longrightarrow g = k|_D = 0 \Longrightarrow h(z) = \int_\gamma \frac{f(w)dw}{w-z} = g(z) + 2\pi i Ind_z\gamma f(z)$ und $g(z) = 0$

$\square$

Corollar 4.1.17. *Homologieversion Cauchy-Integralsatz (CIF)*
$D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D), \gamma$ 0-homolog in D
$\Longrightarrow \int_\gamma f(w)dw = 0$

Beweis : Sei $z \in D \backslash S_\gamma$ fest, $g(w) = f(w)(w-z) \Longrightarrow g \in \mathcal{O}(D), g(z) = f(z)(z-z) = 0$

Wegen Homologie und CIF:

$\int_\gamma f(w)dw = \int_\gamma \frac{g(w)dw}{w-z} =_{\text{Cauchy}} 2\pi i g(z) \cdot Ind_z\gamma = 0$ $\square$

Corollar 4.1.18. *Homologieversion $(CIF)_n$*
$D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D), \gamma$ 0-homolog in D
$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \cdot Ind_z\gamma$

Beweis Skizze: Induktion über $n \geq 0$ durch Differentiation unter Integal, benutze $Ind_\gamma(z) = 0 \, \forall z \in \mathbb{C} \backslash S_\gamma$ $\square$

4.2 Isolierte Singularitäten und Laurent-Entwicklung

Kreisring $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_- < |z - o| < r_+\}$, wobei $0 \leq r_- < r_+ \leq \infty$

Bemerkung 4.2.1. *Für $r_- = 0$, $r_+ = \infty$ ist $\Omega = \mathbb{C} \backslash \{o\}$*

Definition 4.2.2. $\Omega_+ := \{z \in \mathbb{C} : |z - o| < r_+\}$
$\Omega_- := \{z \in \mathbb{C} : r_- < |z - o|\}$
Kreisscheiben (um o bzw. ∞)

Satz 4.2.3. $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \, \exists_1 \, f_+ \in \mathcal{O}(\Omega_+), \; f_- \in (\Omega), \lim_{|z| \to \infty} f_-(z) = 0$

so dass $\forall \, z \in \Omega_+ \cap \Omega_- = \Omega, \; f(z) = f_+(z) - f_-(z)$

Beweis : $r_- = r < r_+ = R$

<u>Existenz</u>
Sei $r_- < \rho < r_+$

$f_\rho(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(o)} \frac{f(w)dw}{w-z}, \forall z \in \mathbb{C} \backslash \partial B_\rho(o)$

Holomorphie unter dem Integral $\Longrightarrow f_\rho \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \backslash \partial B_\rho(o))$

Seien $r_- < \rho < \rho' < r_+$, $z \in \mathbb{C} \backslash \partial B_{\rho,\rho'}[o]$

Schritt 1: $f_\rho(z) = f_{\rho'}(z)$

$\frac{f}{id-z} \in \mathcal{O}(\Omega\backslash\{z\})$
$B_{\rho,\rho'}[0] \subset \Omega\backslash\{z\} \Longrightarrow \partial B_{\rho,\rho'}^{\rightarrow}[o] = \partial B_{\rho}^{\vec{\prime}}(o) - \partial B_{\rho}^{\rightarrow}(o)$ null-homolog in $\Omega\backslash\{z\}$, denn $T_{\partial B_{\rho,\rho'}^{\rightarrow}[o]} = \partial B_{\rho,\rho'}(o) \subset \Omega\backslash\{z\}$

Homologie-Cauchy Integral-Satz für $\frac{f}{id-z} \Longrightarrow 0 = \int_{\partial B_{\rho,\rho'}(o)} \frac{f(w)dw}{w-z} = \int_{\partial B_{\rho'}(o)} \frac{f(w)dw}{w-z} - \int_{\partial B_{\rho}(o)} \frac{f(w)dw}{w-z} =$
$2\pi i f_{\rho'}(z) - 2\pi i f_\rho(z) = 0 \Longrightarrow f_\rho(z) = f_{\rho'}(z)$ Also gilt Gleichheit auf $\mathbb{C}\backslash B_{\rho,\rho'}[o]$

Schritt 2: Definition von $f_\pm$, $\kappa = \pm$
$z \in \Omega_\kappa \Longrightarrow \exists\, r_- < \rho_\kappa < r_+$
$\kappa|z-o| < \kappa\rho_\kappa \Longrightarrow f_\kappa(z) = f_{\rho_\kappa}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\rho_\kappa}(o)} \frac{f(w)dw}{w-z} \Longrightarrow f_\kappa$ unabhängig von Wahl von ρ_κ wegen Schritt 1
$\Longrightarrow f_\kappa$ holomorph auf Ω_κ

Schritt 3
$|z| \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \kappa = -$, Œ $|z-o| > r_+$

$|f_-(z)| = |\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(o)} \frac{f(w)dw}{w-z}| \le \frac{2\pi\rho}{2\pi} \sup_{w\in\partial B_\rho(o)} |\frac{f(w)}{w-z}| \le \rho \frac{\sup_{v\in\partial B_\rho(o)}|f|}{\inf_{w\in\partial B_\rho(o)}|w-z|} \longrightarrow_{|z|\to\infty} 0$

Schritt 4 $z \in \Omega_+ \cap \Omega_- = \Omega \Longrightarrow \exists\, r_- < \rho_- < |z-o| < \rho_+ < r_+$
$\Longrightarrow \partial B_{\rho_-,\rho_+}[o]$null-homolog in Ω
und $Ind_{\partial B_{\rho_-,\rho_+}[o]}(z) = 1$

$\Longrightarrow f(z) = f(z)\cdot Ind_{\partial B_{\rho_-,\rho_+}[o]}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\rho_+}[o]} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\rho_-}[o]} \frac{f(w)dw}{w-z}$
$= f_{\rho_+}(z) - f_{\rho_-}(z) = f_+(z) - f_-(z)$

Eindeutigkeit:

$f = f_+ - f_- = g_+ - g_-$ auf Ω $f_+, g_+ \in \mathcal{O}(\Omega_+)$, $f_-, g_-\mathcal{O}(\Omega_-)$, $f_-(\infty) = 0 = g_-(\infty) \Longrightarrow$ $f_+ - g_+ = f_- - g_-$ auf $\Omega \Longrightarrow \exists k \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $k|_{\Omega_\pm} = f_\pm - g_\pm$

k ist beschränkt, also f konstant, also $k = 0$ also $f_\pm = g_\pm$

□

Definition 4.2.4. *Laurent-Koeffizienten (Fourier-Koeffizienten)*
$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-o| < R\}$ *Kreisring,* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$
$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(o)} \frac{f(w)dw}{(w-o)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, r < \rho < R$

Bemerkung 4.2.5. $\hat{f}(n)$ *ist unabhängig von* ρ *nach Homologie-CIF*

Satz 4.2.6. *(Laurent)*
Ω *Kreisring um* o*,* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)(z-o)^n$ *(Laurentreihe, kompakt konvergent auf* Ω*)*

Beweis : $f(z) = f_+(z) - f_-(z)$, $f_\pm \in \mathcal{O}(\Omega_\pm)$ Da Ω_+ Kreisscheibe $B_R(o)$
Taylor $\Longrightarrow f_+(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f_+^{(n)}(o)}{n!}(z-o)^n$ kompakt konvergent auf Ω_+

Definiere g auf $B_{\frac{1}{r}}(0)$

$$g(\zeta) = \begin{cases} f_-(o+\frac{1}{\zeta}) & 0 < |\zeta| < \frac{1}{r} \\ 0 & \zeta = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow g \in \mathcal{C}(B_{\frac{1}{r}}(0))$, da für $\zeta \to 0$ gilt $|o+\frac{1}{\zeta}| \to +\infty \Longrightarrow f_-(o+\frac{1}{\zeta}) \to 0$ nach Satz

$g \in \mathcal{O}(B_{\frac{1}{r}}(0)\backslash\{0\})$, da $f_- \in \mathcal{O}(\Omega_-)$ Morera $\Longrightarrow g \in (B_{\frac{1}{r}}(0))$
Taylor $\Longrightarrow g(\zeta) = \sum_{n>0} \frac{g(n)(0)}{n!}\zeta^n$ kompakte Konvergenz auf $B_{\frac{1}{r}}(0)$

$z \in \Omega = \Omega_+ \cap \Omega_-$

$f(z) = f_+(z) - f_-(z) =_{z=o+\frac{1}{\zeta}} f_+(z) - g(\frac{1}{z-o}) =$
$\sum_{n\geq 0} \frac{f_+^{(n)}(o)}{n!}(z-o)^n - \sum_{m>0} \frac{g(m)(o)}{m!}(z-o)^{-m} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-o)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$

$$a_n = \begin{cases} \frac{f_+^{(n)}(o)}{n!} & n \geq 0 \\ -\frac{g^{(-n)}(o)}{(-n)!} & n < 0 \end{cases}$$

Beh.: $a_n = \hat{f}(n) \,\forall\, n \in \mathbb{Z}$
(Orthogonalitätsrelationen)
Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest, $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(o)} \frac{f(w)dw}{(w-o)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(o)} \frac{1}{(w-o)^{n+1}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(w-o)^k dw =$

$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{(w-o)^k}{(w-o)^{n+1}} dw = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(0)} (w-o)^{k-n-1}dw = a_n,$
da $\int_{\partial B_\rho(0)} (w-o)^{k-n-1}dw = \delta_{k,n}$ □

4.2.1 Isolierte Singularitäten

Sei $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $o \in D$,
o heisst isolierte Singularität von f, falls $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{o\})$.
Sei $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{o\}) \Longrightarrow R := dist(o, \partial D) \leq +\infty \Longrightarrow \Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-o| < R\} \subset D\backslash\{o\}$
$\Longrightarrow f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)(z-o)^n$ kompakte Konvergenz auf Ω (Laurent-Reihe)

Definition 4.2.7. *Nullstellenordnung*
$\underline{deg}_o f = \inf\{n \in \mathbb{Z} : \hat{f}(n) \neq 0\}$ *Untergrad von* f

Definition 4.2.8.
1. *f hat eine hebbare Singularität, falls* $\underline{deg}_o f \geq 0$
2. *f hat einen Pol der Ordnung $-k$, falls* $-\infty < \underline{deg}_o f = k < 0$
3. *f hat eine wesentliche Singularität* $\Longleftrightarrow \underline{deg}_o f = -\infty$

Beispiel 4.2.9. $f = 0 \Longrightarrow \hat{f}(n) = 0 \,\forall\, n \Longrightarrow \underline{deg}_o f = inf\emptyset = +\infty$

Beispiel 4.2.10. $\underline{deg}_o f = m \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f(z) = \sum_{n\geq m} a_n(z-o)^n$, $a_m \neq 0 = a_m(z-o)^m + \sum_{n>m} a_n(z-o)^n = (z-o)^n[a_m + \sum_{n>m} a_n(z-o)^{n-m}] = (z-o)^m[0 \neq a_m + h(z)]$ *wobei* $h(z)$ *holomorph auf* $B_{r_+}(o)$ *und* $h(o) = 0$.
Falls $m > 0$, *so ist* o *Nullstelle* m*-ter Ordnung.*
Falls $m < 0$, *so ist* o *Polstelle der Ordnung* $(-m)$.

Beispiel 4.2.11. $\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$ *nach unten unbeschränkt.*
$\Longrightarrow \underline{deg}_o f = -\infty$ *wesentliche Singularität.*

Lemma 4.2.12.
1. $\underline{deg}_o(fg) = \underline{deg}_o f + \underline{deg}_o g$, *falls* $\underline{deg}_o f, \underline{deg}_o g \in \mathbb{Z}$
2. $\underline{deg}_o(f+g) \geq \min(\underline{deg}_o f, \underline{deg}_o g)$

Beweis :

1. $\underline{deg}_o f = m \in \mathbb{Z}, \quad \underline{deg}_o g = l \in \mathbb{Z}$
$\Longrightarrow f(z) = (z-o)^m(a_m + h(z)), \quad g(z) = (z-o)^l(b_l + k(z))$
$\Longrightarrow f(z)g(z) = (z-o)^{m+l}(a_m k(z) + b_l h(z) + k(z)h(z) + a_m b_l)$
Wegen $a_m b_l \neq 0$ ($\mathbb{C}$ nullteilerfrei) und $a_m k(z) + b_l h(z) + k(z)h(z)$ holomorph und verschwindet in o.
$\Longrightarrow \underline{deg}_o(fg) = m + l = \underline{deg}_o f + \underline{deg}_o g$

□

Satz 4.2.13. *Riemannscher Hebbarkeitssatz*
$f \in \mathcal{O}(D\backslash\{0\})$. *Äquivalent:*

1. $\underline{deg}_o f \geq 0$
2. $\exists$ *holomorphe Fortsetzung* $F \in \mathcal{O}(D)$ *mit* $F|_{D\backslash\{o\}} = f$
3. $\exists$ *stetige Fortsetzung* $F \in \mathcal{C}(D)$ *mit* $F|_{D\backslash\{o\}} = f$
4. $\exists\, o \in U \underset{offen}{\subset} D$, $f|_{U\backslash\{0\}}$ *beschränkt. 'f nahe o beschränkt'*

Beweis :

$1 \Longrightarrow 2$ $m = \underline{deg}_o f \geq 0 \Longrightarrow f(z) = (z-o)^m[a_m + h(z)] =: F(z)$

$2 \Longrightarrow 3$ klar

$3 \Longrightarrow 4$ Sei $F \in \mathcal{C}(D)$, $o \in U \underset{\text{offen}}{\subset} D, \bar{U}$ kompakt $\Longrightarrow \sup_{U\backslash\{o\}} |f| \leq \sup_{\bar{U}} |F| < +\infty$

$4 \Longrightarrow 1$ Sei $o \in U \underset{\text{offen}}{\subset} D, f|_{U\backslash\{o\}}$ beschränkt.
$\Longrightarrow \exists R > 0 : B_R[o] \subset U \Longrightarrow \forall\, 0 < r \leq R, \forall n < 0\, |\hat{f}(n)| = |\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(o)} \frac{f(w)dw}{(w-o)^{n+1}}|$
$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r^{n+1}} \sup_{\partial B_r(o)} |f| \leq r^{-n} \sup |f| \to 0$ für $r \to 0\, (n < 0)$
$\Longrightarrow \hat{f}(n) = 0 \forall\, n < 0 \Longrightarrow \underline{deg}_o f \geq 0$

□

Definition 4.2.14. *1-Punktkompaktifizierung(Riemannsche Zahlenkugel und ihre Topologie)*

$\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *topologischer Raum*

offene Umgebungen:
1. Fall $o \in \mathbb{C}$*: Basis von Umgebungen* $o \in U \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}$

2. Fall $o = \infty$*:* $\bar{\mathbb{C}} \backslash K$*, wobei* K *kompakte Teilmenge von* $\mathbb{C}$

Stetigkeit:
X *metrischer Raum,* $F : X \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ F *stetig in* $a \in X$*:*
Fall 1: $F(a) \in \mathbb{C} \subset \bar{\mathbb{C}}$
F *stetig in* $a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in X : d(x,a) \leq \delta \Longrightarrow |F(x) - F(a)| \leq \varepsilon$

Fall 2: $F(a) = \infty$
F *stetig in* $a \Longleftrightarrow \forall\, K \subset \mathbb{C}$ *kompakt* $\exists \delta > 0\, \forall\, x \in X : d(x,a) \leq \delta : F(x) \notin K$

Satz 4.2.15. *Cassorati-Weierstrass*

Sei $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{o\})$. Dann ist äquivalent:

1. $\underline{deg}_o f > -\infty$
2. $\exists$ *meromorphe Fortsetzung* $F(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ *von* f, *wobei* g *und* h *holomorph,* $h \neq 0$
3. $\exists$ *stetige Fortsetzung von* f, $F : D \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$
4. $\exists\, o \in U \underset{offen}{\subset} D$, *so dass* $f(U\backslash\{o\})$ *nicht dicht in* $\mathbb{C}$

Beweis :

$1 \Longrightarrow 2$ Sei $m = \underline{deg}_o f > -\infty \Longrightarrow f(z) = (z-o)^m(a_n + \phi(z))$, wobei ϕ holomorph in Umgebung von o.

Falls $m \geq 0 :\ g(z) := f(z),\ h(z) := 1$
Falls $m < 0 :\ g(z) := a_m + \phi(z)$ holomorph nahe o, $h(z) := (z-o)^{-m}$ Polynom

$2 \Longrightarrow 3$ klar: Sei $U \subset D$ offene Umgebung von o, so dass $g, h \in \mathcal{O}(U)$, $\frac{g}{h} = f|U\backslash\{o\}$
$\Longrightarrow g : U \longrightarrow \mathbb{C} \underset{\text{offen}}{\subset} \bar{\mathbb{C}}$ stetig
$\Longrightarrow g : U \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ stetig
$\Longrightarrow h : U \longrightarrow \mathbb{C} \underset{\text{offen}}{\subset} \bar{\mathbb{C}}$ stetig
$\Longrightarrow h : U \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ stetig
Wegen $\frac{1}{z} : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ stetig gilt:
$\frac{1}{h} : U \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ stetig
$\Longrightarrow \frac{g}{h} : U \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ stetig
$\Longrightarrow F := \frac{g}{h}$ stetige $\bar{\mathbb{C}}$-wertige Fortsetzung von f

$3 \Longrightarrow 4$ Sei $F : D \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ stetig, $F|_{D\backslash\{o\}} = f$
$\Longrightarrow \exists\, o \in U \underset{\text{offen}}{\subset} D$, $F(U)$ nicht dicht in $\mathbb{C}$
$\Longrightarrow f(U\backslash\{0\}) = F(U\backslash\{0\}) \subset F(U)$ nicht dicht in $\bar{\mathbb{C}}$

$4 \Longrightarrow 1$ $\exists\, o \in U \underset{\text{offen}}{\subset} D$, $f(U\backslash\{o\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$
$\overline{f(U\backslash\{o\})} \neq \mathbb{C} \Longrightarrow \exists b \in \mathbb{C}\backslash\overline{f(U\backslash\{o\})} \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \Longrightarrow \exists\, r > 0,\ B_r(0) \subset \mathbb{C}\backslash f(U\backslash\{o\})$
$\Longrightarrow \forall z \in U\backslash\{o\},\ |f(z) - b| \geq r$
$\Longrightarrow g(z) = \frac{1}{f(z)-b} \in \mathcal{O}(U\backslash\{o\}),\ |g(z)| \leq \frac{1}{r}$
$\Longrightarrow m = \underline{deg}_o g \geq 0$ wegen Riemann

$\Longrightarrow \underline{deg}_o(f-b) = -\underline{deg}_o g = -m$
$\Longrightarrow \underline{deg}_o f \geq \min(\underline{deg}_o(f-b), \underline{deg}_o b)$ und es gilt $\underline{deg}_o(f-b) = -m$, $\underline{deg}_o b \in \{\infty, 0\}$ also:
$\Longrightarrow \underline{deg}_o f > -\infty$

□

Folgerung 4.2.16. *Cassorati-Weierstrass*

f hat wesentliche Singularität in $o \Longrightarrow \forall o \in U \underset{offen}{\subset} \mathbb{C} :\ f(U\backslash\{o\})$ dicht in $\mathbb{C}$

4.3 Calculus of residues

$D \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}$ domain, $o \in D$, $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{o\})$ holomorphic (analytic) function

Laurent-expansion (series)

$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-o)^n$ converges compactly on annulus $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-o| < R\}$, $R = dist(o, \partial D)$ boundary distance.

$a_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(o)} \frac{f(w)}{(w-o)^{n+1}}$, $0 < \rho < R$ (CIF)

$n = -1: \quad a_{-1} = \hat{f}(-1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(o)} f(w)dw$ (CIS)

$n \geq 0 \quad \hat{f}(n) = \frac{f^{(n)}(o)}{n!}$, $f \in \mathcal{O}(D)$

Definition 4.3.1. $a_{-1} = \hat{f}(-1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(o)} f(w)dw =: Res_o(f)$ *residue of* f *at* o
o *isolated singularity, value of* $Res_o f$ *independent of* ρ *such that* $0 < \rho < R$

Bemerkung 4.3.2. $\underline{deg}_o f$ *is called 'order of vanishing'*

Satz 4.3.3. *Rules to compute residues*

1. $\underline{deg}_o f \geq -1$, $\underline{deg}_o g \geq 0 \Longrightarrow Res_o(fg) = Res_o f \cdot g(o)$
2. $\underline{deg}_o \phi = 1, \underline{deg}_o \psi \geq 0$
   $\Longrightarrow Res_o \frac{\psi}{\phi} = \frac{\psi(o)}{\phi'(o)}$
3. *(theoretical)*
   $\underline{deg}_o f = -m < 0$ *pole of order* m
   $\Longrightarrow Res_o f = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-o)^m f(z)\right]_{z=o}$

Beweis :

1. $f(z) = \sum_{n\geq -1} a_n(z-o)^n, \quad g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n(z-o)^n$
   $f(z)g(z) = \frac{a_{-1}b_0}{z-o} + \sum_{n\geq 1} a_{-1}b_n(z-o)^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n(z-o)^n g(z)$ both sums are holomorphic
   $\Longrightarrow Res_o fg = a_{-1}b_o = Res_o f \cdot g(o)$
2. $Res_o \frac{\psi}{\phi} = Res_o\left[\frac{\psi}{z-o}\frac{z-o}{\phi}\right]$
   $=_{1.} \left[Res_o \frac{\psi}{z-o}\right] \cdot Val\left(\frac{z-o}{\phi(z)}\right)_{z=o} = \psi(o) \cdot \frac{1}{\phi'(o)}$

   since $\varphi'(o) = \lim_{z\to o} \frac{\phi(z)-\phi(o)}{z-o} = \lim_{z\to o}\frac{\phi(z)}{z-o}$

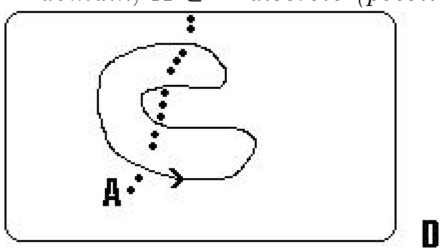
3. $f(z) = \sum_{n \geq -m} a_n(z-o)^n$
$\Longrightarrow (z-o)^m f(z) = \sum_{n \geq -m} a_n (z-o)^{n+m} = \sum_{k \geq o} a_{k-m}(z-o)^k$

$\Longrightarrow \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-o)^m f(z)\right]_{z=o} = a_{(m-1)-m} = a_{-1} = Res_o f$ since $k = m-1$

$\square$

Satz 4.3.4. *Theorem of Residues*

D domain, $A \subset D$ discrete (possibly infinite)



$\gamma \in Z_1(D)$ 1-cycle in D, null-homologous (interior), $T_\gamma \subset D$

trace $S_\gamma \subset D \backslash A$, $A \cap S_\gamma = \emptyset$
$f \in \mathcal{O}(D \backslash A) \Longrightarrow$

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w)dw = \sum_{a \in A} Res_a f \cdot Ind_a(\gamma)$ *'finite sum'*

Bemerkung 4.3.5. *1. RightHandSide = finite sum*

2. $f \in \mathcal{O}(D) \Longrightarrow \forall\, a \in A,\ Res_a f = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w)dw = 0 \quad (\hat{=} CIS)$

Beweis : 1. Step RHS$= \sum_{finite} Res_a f \cdot Ind_a(\gamma)$ interior $T_\gamma \subset D \Longrightarrow T_\gamma \cap S_\gamma$ compact
$\Longrightarrow A \cap (T_\gamma \cup S_\gamma)$ compact and discrete=finite

$\forall\, z \in D \backslash [A \cap (T_\gamma \cup S_\gamma)] \Longrightarrow Res_z f \cdot Ind_z(\gamma) = 0$

2. Step Since $A_\gamma := A \cap (S_\gamma \cup T_\gamma) = A \cap T_\gamma$ finite $\Longrightarrow \forall\, z \in A_\gamma\ \exists\, B_{r_z}(z) \subset T_\gamma$ because $T_\gamma \underset{\text{offen}}{\subset} D$
and $\{\overline{B_{r_z}(z)} : z \in A_\gamma\}$ pairwise disjoint and $B_{r_z}(z) \cap A = \{z\}$ (automatic)

define new 1-cycle $Z_1(D) \ni \eta := \gamma - \sum_{z \in A_\gamma} Ind_z(\gamma) \cdot \partial \vec{B_{r_z}}(z)$

3. Step η null-homologous in $D \backslash A$, i.e. $T_\eta \subset D \backslash A$
Let $a \in \mathbb{C} \backslash (D \backslash A) = (\mathbb{C} \backslash D) \cup A$

Case 1: $a \in \mathbb{C} \backslash D \Longrightarrow Ind_a \gamma = 0$ since $T_\gamma \subset D$

$\forall\, z \in A_\gamma : Ind_a \partial \vec{B_{r_z}}(z) = 0$

$\Longrightarrow Ind_a\eta = Ind_a\gamma - \sum_{z\in A_\gamma} Ind_z\gamma \cdot Ind_a\partial B_{r_z}^{\rightarrow}(z) = 0$

Case 2: $a \in A \Longrightarrow Œ\, a \in A_\gamma$

$Ind_a\eta = Ind_a\gamma - \sum_{z\in A_\gamma} Ind_z\gamma Ind_a\partial B_{r_z}^{\rightarrow}(z) =_{z=a} Ind_a\gamma - Ind_a\gamma Ind_a\partial B_{r_z}^{\rightarrow}(z) = 0$

$\Longrightarrow \eta$ null-homologous in $D\backslash A$ (domain)

$f \in \mathcal{O}(D\backslash A) \Longrightarrow_{CIS,homologous} 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\eta f(w)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)dw - \sum_{z\in A_\gamma} Ind_z\gamma \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{r_z}^{\rightarrow}(z)} f(w)dw$
and $\int_{\partial B_{r_z}^{\rightarrow}(z)} f(w)dw = Res_z f$

□

Application to meromorphic functions

Definition 4.3.6. *$f \in \mathcal{M}(D)$ meromorphic $\Longleftrightarrow \exists$ discrete $A \subset D$ such that*

1. *$f \in \mathcal{O}(D\backslash A)$, $\underline{deg}_z f \geq 0$, $z \in D\backslash A$*
2. *$\underline{deg}_a f \in \mathbb{Z}\, \forall\, a \in A$ 'only poles'*

Lemma 4.3.7. *$f \in \mathcal{M}(D)$, $f \neq 0 \Longrightarrow \frac{f'}{f} \in \mathcal{M}(D)$ and*

$$Res_a \frac{f'}{f} = \underline{deg}_a f$$

Beweis : $a \in A, \underline{deg}_a f = m \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f(z) = (z-a)^m h(z)$ in neighbourhood of $a \in D$
h holomorphic near a, $h(a) = a_m \neq 0$
$\Longrightarrow f'(z) = m(z-a)^{m-1}h(z) + (z-a)^m h'(z)$

$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}$
$\Longrightarrow Res_a \frac{f'}{f} = m = \underline{deg}_a f$

□

Theorem 4.3.8. *counting zeroes with multiplicty*

$\gamma \in Z_1(D)$ nullhomologous in D, $0 \neq f \in \mathcal{M}(D)$ $\forall z \in S_\gamma$: $\underline{deg}_z f = 0$ (no zero, no pole)
$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{df}{f} = \sum_{z\in T_\gamma} \underline{deg}_z f \cdot Ind_z\gamma$ (zeroes inside γ)
More generally:
$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h\frac{df}{f} = \sum_{z\in T_\gamma} h(z)\underline{deg}_z f Ind_z\gamma$

Beweis : Since f meromorphic and $f \neq 0$
$\Longrightarrow A = \{z \in D : \underline{deg}_z f \neq 0\} \subset D$(discrete)

$g := h\frac{f'}{f} \in \mathcal{O}(D\backslash A)$

$z \in A : Res_z g = h(z) \cdot Res_z \frac{f'}{f} = h(z)\underline{deg}_z f$
$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h\frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(w)dw$
$= \sum_{a\in A} Res_a g Ind_a \gamma = \sum_{a\in A} \underline{deg}_a f h(a) Ind_a \gamma$

□

Definition 4.3.9. *$D \subset \mathbb{C}^n$, $P \subset D$ diskret, Menge der Polstellen*

$f \in \mathcal{O}(D\backslash P)$ $\forall\, z \in D$, $\underline{deg}_z f \in \mathbb{Z}$. Dann heisst f meromorph

$\gamma \in Z_1(D\backslash P)$ 1-Zyklus in $D\backslash P$ null-homolog in D, $S_\gamma \subset D\backslash P$

'totale Nullstellen-Ordnung' $\underline{deg}_\gamma f := \sum_{z\in D\backslash S_\gamma} Ind_z(\gamma)\underline{deg}_z f$

Satz 4.3.10. *Anwendung des Nullstellensatzes*

f meromorph, $f \neq 0$, $\forall z \in S_\gamma : \underline{deg}_z f = 0$ dh. kein Pol, keine Nullstelle auf S_γ

$\Longrightarrow \underline{deg}_\gamma f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)dw}{f(w)}$

Totale Nullstellen-Zahl in T_γ = Integral über 'logarithmische Ableitung'

Satz 4.3.11. *Rouché*
$f, g \in \mathcal{O}(D)$, $\gamma 0-$homolog in D
Angenommen $|f-g| < |f| + |g|$ auf S_γ

$\Longrightarrow \underline{deg}_\gamma f = \underline{deg}_\gamma g$

Beweis : Homotopie: $f_t = t\cdot f + (1-t)g \in \mathcal{O}(D)$, $t \in [0,1]$, $\Longrightarrow f_1 = f$, $f_0 = g$

Widerspruchsannahme: $\exists o \in S_\gamma$, $f_t(o) = 0 \Longrightarrow tf(o) = (t-1)g(o) \Longrightarrow |f(o)-g(o)| = |t\cdot(g(o)-f(o))| + |(1-t)(f(o)-g(o))| = |t\cdot g(o)-(t-1)g(o)| + |(1-t)f(o)+tf(o)| = |g(o)|+|f(o)|$ Widerspruch !

$\Longrightarrow \forall o \in S_\gamma : f_t(o) \neq 0 \Longrightarrow \underline{deg}_o f_t \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

$\Longrightarrow f_t$ hat weder Pol- noch Nullstelle auf S_γ

$$\Longrightarrow \mathbb{Z} \ni \underline{deg}_\gamma f_t = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_\gamma \frac{f_t'(w)dw}{f_t(w)}}_{\text{stetig in t, also konstant}}$$

$\Longrightarrow \underline{deg}_\gamma f = \underline{deg}_\gamma f_1 = \underline{deg}_\gamma f_0 = \underline{deg}_\gamma g$

□

Anwendung von Rouché

B= Einheitskreis = $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$f \in \mathcal{O}(B) \cap \mathcal{C}(\bar{B})$ $|f|_{\partial B} < 1 \Longrightarrow \exists_n$ Lösungen $z \in B$ mit $f(z) = z^n$

Beweis : $\varphi(z) = f(z) - z^n$, $\psi(z) = z^n \in \mathcal{O}(B) \cap \mathcal{C}(\bar{B})$

$\gamma := \partial\vec{B}$ null-homolog in $\bar{B}$. Auf $S_\gamma = \partial B$ gilt $|\varphi(z) - \psi(z)| = |f(z)| < 1 = |\psi(z)| \leq |\varphi(z)| + |\psi(z)| \Longrightarrow 1 = \sum_{z \in B} Ind_z \gamma \underline{deg}_z \varphi = \underline{deg}_\gamma \psi = n = \#$ Nullstellen von φ in B nach Rouché

$f(z) + z^n = 0 \Longleftrightarrow f(z) = -z^n$

$\square$

Definition 4.3.12. *$K \subset D$ kompakte Teilmenge, ∂K stückweise glatt $\Longleftrightarrow \exists$ 1-Zyklus γ in D mit $S_\gamma = \partial K$*

Satz 4.3.13. *∂K stückweise glatt.*

Dann gilt:

1. *$\partial\vec{K}$ null-homolog in D, dh. $T_{\partial\vec{K}} \subset D$*
2. *$\forall z \in T_{\partial\vec{K}} = \mathring{K}$ gilt $Ind_{T_{\partial K}} = 1$*

Kapitel 5

Homotopie und Homologie

5.1 Grundbegriffe

Für eine ausführlichere Einführung siehe Vorlesungen in Topologie

$I = [0, 1]$, γ_0, $\gamma_1 \in \mathcal{C}(I, D)$ *stückweise glatte Kurven*

Definition 5.1.1. *1. Fall* γ_0, γ_1 *gleiche Endpunkte* $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_0(1) = b$

$\gamma_0 \equiv_D \gamma_1$ *(homotop in D bei festem Endpunkt)*

$:\Longleftrightarrow \exists\, \Gamma := I \times I \longrightarrow D$, $(s, t) \mapsto \Gamma(s, t) = \gamma_s(t)$ *stetig*

wobei s 'Deformationsparameter, t 'Zeitparameter' genannt werden.

so dass $\Gamma(0, t) = \gamma_0(t)(\Gamma(0, -) = \gamma_0()$ $\Gamma(1, t) = \gamma_1(t)\,(\Gamma(1,) = \gamma_1()$ *und* $\Gamma(s, 0) = a = \gamma_s(0)$ $\Gamma(s, 1) = b = \gamma_s(1)$

2. Fall γ_0, γ_1 *geschlossen, d.h.* $\gamma_0(0) = \gamma_0(1), \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$

$\gamma_0 \equiv_D \gamma_1$ *homotop in D als geschlossene Kurven*

$\Longleftrightarrow \exists\, \Gamma : I \times I \longrightarrow D$ *stetig,* $(s, t) \mapsto \Gamma(s, t) =: \gamma_s(t)$

so dass $\gamma_0(t) = \Gamma(0, t)$, $\gamma_1(t) = \Gamma(1, t)$ *und* γ_s *geschlossen,* $\Gamma(s, 0) = \Gamma(s, 1)$

Beispiel 5.1.2. $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ *Kreisring,* $0 \leq r < R \leq +\infty$

Sei $r < \rho_1 < \rho_2 < R \Longrightarrow \partial \vec{B_{\rho_1}}(0) \equiv_D \partial \vec{B_{\rho_2}}(0)$ *homotop in D als geschlossene Kurven*

Bew: $\gamma_0 = \partial \vec{B_{\rho_1}}(0)$, $\gamma_1 = \partial \vec{B_{\rho_2}}(0)$

$\gamma_0(t) = \rho_1 e^{2\pi i t}$, $\gamma_1(t) = \rho_2 e^{2\pi i t}$

$\gamma_s(t) = ((1 - s)\rho_1 + s\rho_2)e^{2\pi i t}$

Definition 5.1.3. *D einfach-zsh* $:\Longleftrightarrow$ *Jede geschlossene Kurve in D ist null-homotop.*

$\Longleftrightarrow \forall \gamma \in \mathcal{C}(I, D)$ *geschlossen:* $\gamma \equiv_D pt = o$ *d.h.* $\tilde{\gamma}(t) = o$

$\Longleftrightarrow$ *Je zwei Kurven in D mit gleichen Endpunkten sind homotop*

Satz 5.1.4. *D konvex $\Longrightarrow$ D sternförmig $\Longrightarrow$ D einfach zusammenhängend*

Beweis : D *o-sternförmig. Sei* $\gamma \in \mathcal{C}(I, D)$ *geschlossene Kurve*

z.z: $\gamma \equiv_D pt = o$

$\Gamma(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s \cdot o \in [o, \gamma(t)] \subset D$

Γ *stetig in* s *und* t

$\Gamma(0,t) = \gamma(t)$, $\Gamma(1,t) = o$, $\Gamma(s,-)$ *geschlossen*

$\Gamma(s,o) = (1-s)\gamma(0) + so = (1-s)\gamma(1) + so = \Gamma(s,1)$

□

Bemerkung 5.1.5. *Homotopie $\Longrightarrow$ Homologie*

Satz 5.1.6. *Seien* $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{C}(I,D)$ *stückweise glatte Kurven* $\gamma_0 \equiv_D \gamma_1$ *als geschlossene Kurven*

$\Longrightarrow \forall\, o \in \mathbb{C}\backslash D : Ind_o(\gamma_0) = Ind_o(\gamma_1)$

Beweis : Sei $\Gamma(s,t)$ *Homotopie von* γ_0 *nach* γ_1. *Setze* $\gamma_s(t) := \Gamma(s,t) \in D$ Œγ_s *stetig diffbar in* $t \in [0,1]$ *(Stone-Weierstrass)* $\Longrightarrow \mathbb{Z} \ni Ind_o\gamma_s = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_s} \frac{dw}{w-o} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_s'(t)dt}{\gamma_s(t)-o}$ *stetig in* s *also konstant*

$\Longrightarrow Ind_o\gamma_0 = Ind_o\gamma_1$ □

Corollar 5.1.7. *Sei* $D \subset \mathbb{C}$ *1-zusammenhängend* $\Longrightarrow$ *Jede geschlossene Kurve in* D *ist null-homolog*

Beweis : $o \in \mathbb{C}\backslash D \Longrightarrow_{\gamma \equiv_D pt} Ind_o\gamma = Ind_o pt = 0 \Longrightarrow T_\gamma \subset D$ □

Kapitel 6

Konforme Abbildungen

6.1 Biholomorphe Abbildungen

konform=winkeltreu=holomorph (oder antiholomorph)

Definition 6.1.1. *D_1, $D_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete $F : D_1 \longrightarrow D_2$ biholomorph $\Longleftrightarrow$*

1. *$F : D_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, $F \in \mathcal{O}(D_1, \mathbb{C})$*
2. *F bijektiv, dh. F injektiv und $F(D_1) = D_2$*
3. *$F^{-1} : D_2 \longrightarrow D_1$, $F^{-1} \in (D_2, \mathbb{C})$*

Proposition 6.1.2. *$F : \mathbb{C} \supset D \longrightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph und injektiv $\Longrightarrow$*

1. *$\tilde{D} := F(D)$ Gebiet*
2. *$F : D \longrightarrow \tilde{D}$ biholomorph*

Beweis :

1. F injektiv $\Longrightarrow$ $F \neq 0$, $\underline{deg}_z F \in \mathbb{N}$ .Aus dem Identitätssatz folgt: $\forall\, o \in D \exists\, B_r[o] \subset D$ mit $F(\partial B_r(o) \subset \mathbb{C} \backslash \{0\}$, denn: $F(o) \neq 0 \Longrightarrow$ Beh. wg. Stetigkeit $F(o) = 0 \Longrightarrow F^{-1}(0)$ diskret
   $\Longrightarrow \underline{deg}_z F = 0 \,\forall\, z \in \partial B_r(o)$
   Nach dem Maximumsprinzip ist $F(D) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}$, F stetig $\Longrightarrow F(D)$ zusammenhängend
   Nach dem Residuensatz gilt für $w \in \tilde{D}$:
   $F^{-1}(w) = \sum_{z \in B_r(o)} z \cdot \underline{deg}_z(F - w)$
   denn es gilt:
   $$\underline{deg}_z(F - w) = \begin{cases} 0 & F(z) \neq w \\ 1 & F(z) = w,\ z = F^{-1}(w) \text{ da } F \text{ injektiv} \end{cases}$$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(o)} \frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)-w} d\zeta$

$\Longrightarrow F^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(o)} \frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)-w} d\zeta$ holomorph in w für $w \in F(B_r(o))$

Da $F(B_r(o)) \underset{\text{offen}}{\subset} F(D)$ und $F^{-1}|_{F(B_r(o))}$ holomorph $\Longrightarrow F^{-1}$ holomorph auf $\tilde{D}$

□

Proposition 6.1.3. *$f_n \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C}^\times)$, $f_n \underset{kpkt}{\longrightarrow} f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$ nach Weierstrass.*

Dann gilt: $f = 0$ oder $f(D) \subset \mathbb{C}^\times$

Beweis : Sei $f \neq 0$ Widerspruchsannahme: $0 \in f(D)$ Aus dem Identitätssatz folgt: $f^{-1}(0) \subset D$ diskret $\Longrightarrow \forall z \in f^{-1}(0) \, \exists B_r[z] \subset D$, $B_r[z] \cap f^{-1}(0) = \{z\}$

Es gilt: $\underline{deg}_\gamma f = \sum_{z \in T_\gamma} Ind_z(\gamma) \underline{deg}_z f$

$f_n(D) \subset \mathbb{C}^\times \Longrightarrow 0 = \underline{deg}_{\partial \vec{B_r}(z)} f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f_n'(w)dw}{f_n(w)} \longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f'(w)dw}{f(w)} = \underline{deg}_{\partial B_r(z)} f$

Also $0 = \underline{deg}_{\partial B_r(z)} f > 0$, da $z \in f^{-1}(0)$ Widerspruch!

□

Proposition 6.1.4. *$F_n \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$, F_n injektiv, $F_n \underset{\|\cdot\|_{\infty, D}}{\longrightarrow} F \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$*

Dann gilt: F konstant bzw. F injektiv

Beweis : F nicht konstant, zu zeigen: F injektiv Sei $z, w \in D$, $z \neq w$, $\tilde{D} := D \backslash \{w\} \ni z$ $\mathcal{O}(\tilde{D}, \mathbb{C}^\times) \ni F_n - F_n(w) \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow} F - F(w)$ auf $\tilde{D}$ wegen 6.1.3

$\Longrightarrow F \in (\tilde{D}, \mathbb{C}^\times) \Longrightarrow F(z) - F(w) \neq 0 \Longrightarrow F(z) \neq F(w)$ □

Proposition 6.1.5. *Satz von der Gebietstreue*
$F_n \in \mathcal{O}(D, D)$, $F_n \underset{kpkt}{\longrightarrow} F \in (D, \mathbb{C})$ auf D und $F(D) \subset \bar{D}$.

Dann ist F konstant oder $F(D) \subset D$

Beweis : F nicht konstant, zz. $F(D) \subset D$. Widerspruchsannahme: $\exists \, a \in F(D) \backslash D \Longrightarrow$ $\mathcal{O}(D, \mathbb{C}^\times) \ni F_n - a \underset{\|\cdot\|_{\infty, D}}{\longrightarrow} F - a \neq 0$ auf $D \Longrightarrow_{ref41} F - a \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C}^\times)$ Widerspruch zu $a \in F(D)$ □

Proposition 6.1.6. *Schwarz'sches Lemma*
$D = \mathbb{B} = \{z \in \ |z| < 1\} = B_1(0)$ Einheitskreis $F \in \mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$, $F(0) = 0 \Longrightarrow$

1. *$|F(z)| \leq |z| \, \forall z \in \mathbb{B}$*
2. *$|F'(0)| \leq 1$*
3. *Falls ein $z \in \mathbb{B} \backslash \{0\}$ existiert und $|F(z)| = |z|$ oder falls $|F'(0)| = 1$*
   $\Longrightarrow \exists \, a \in \mathbb{T}$, $a = e^{i\Theta}$, $F(z) = az$ Rotation mit $|a| = 1$

Beweis :

1 und 2 $h(z) := \begin{cases} \frac{F(z)}{z} & z \in \mathbb{B}\backslash\{0\} \\ F'(z) & z = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow h \in \mathcal{O}(\mathbb{B}\backslash\{0\}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{B}) = \mathcal{O}(\mathbb{B})$ da $F(0) = 0$

$\forall\, 0 < r < 1$ gilt nach dem Maximumsprinzip für $B_r[z]$:

$\sup_{|z|\leq r} |h(z)| = \sup_{|z|=r} |h(z)| = \sup_{|z|=r} \frac{|F(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$ Mit $r \to 1 \Longrightarrow |h(z)| \leq 1 \,\forall\, z \in \mathbb{B}$

$z \in \mathbb{B}\backslash\{0\}$: $|F(z)| \leq |z|$ (1) $z = 0 : |F'(0)| \leq 1$ (2)

3 Es gelte $|F(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{B}\backslash\{0\}$ oder $|F'(0)| = 1 \Longrightarrow |h(z)| = 1$ für ein $z \in \mathbb{B}$ $\Longrightarrow h = konst. = a$, $|a| = 1 \Longrightarrow F(z) = az \Longrightarrow F$ Rotation

□

6.2 Moebius-Transformation

Sei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{C})$ definiere:

$[g] : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad [g](z) = \begin{cases} \frac{az+bb}{cz+d} & z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty & z = -\frac{d}{c} \end{cases}$

Dann gilt

1. $[g] : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ homöomorph
2. $[g] \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash\{-\frac{c}{d}, \mathbb{C})$
3. $[g_1], [g_2] = [g_1 g_2]$

Beispiel 6.2.1. *6.2.1* $a \in \mathbb{B}$

$g_a(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ \bar{a} & -1 \end{bmatrix}$

$g_a(0) = a,$

$w = g_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1},$

$z = \frac{a-w}{1-\bar{a}w} = g_a(w),$

$g_a^{-1} = g_a$ *Symmetrie*

Beispiel 6.2.2. *Cayley-Trafo 6.2.1*
$\gamma(z) = \frac{1+z}{1-z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}(z),\ \gamma(0) = 1, det(\gamma) = 2$

$z = \frac{w-1}{w+1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}(w)$

6.2.1 Abbildungseigenschaften

In : $g_a : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$

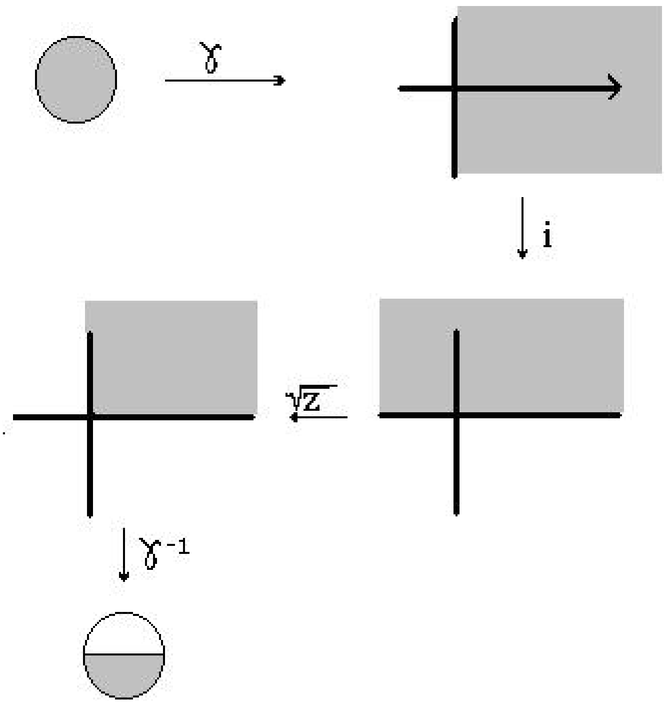
In : $\gamma : \mathbb{B} \longrightarrow \{Re\, w > 0\}$ rechte Halbebene

6.3 Beispiele zu konformen Abbildungen

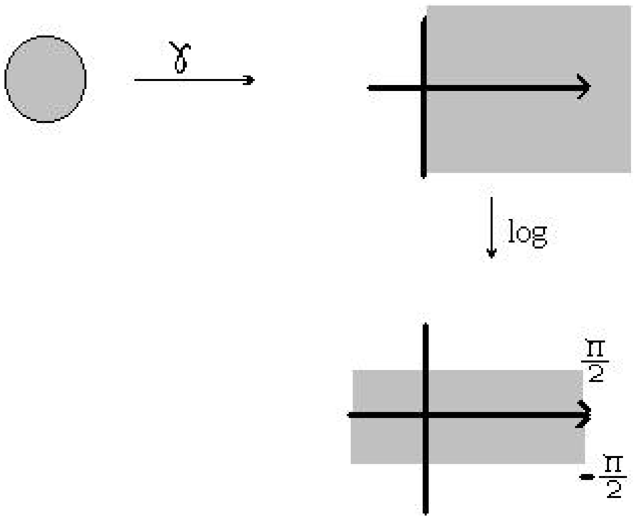
Beispiel 6.3.1. *$F : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{B} \Longrightarrow F$ konstant*

Aus Riemannschem Hebbarkeitssatz folgt $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{B}$ holomorph, aus Liouville folgt, dass F konstant ist.

Beispiel 6.3.2.



Beispiel 6.3.3.



6.4 Satz von Montel

Sei (X, d) metrischer Raum, $\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \supset \mathcal{F}$ Familie

Definition 6.4.1. *$\mathcal{F}$ gleichstetig (equi-continious) :$\Longleftrightarrow$*

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall \, x, y, \in X$

$\forall f \in \mathcal{F} : d(x, y) \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Definition 6.4.2. *(X, d) lokalkompakt (zB $X \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n \underset{\text{abg.}}{\supset} X$)*

$\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ kompakt gleichstetig :$\Longleftrightarrow$

$\mathcal{F}$ gleichstetig und $K \subset X$ kompakt: $\Longrightarrow \mathcal{F}|_K \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$

Bemerkung 6.4.3. *(X, d) lokalkompakt, dann trägt $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ die Topologie der kompakten Konvergenz mit den Halbnormen $p_K(f) := \sup_k |f|$, wobei $K \subset X$ kompakt. $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ ist somit metrisierbar.*

Definition 6.4.4. *$\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ beschränkt*

$\Longleftrightarrow \forall X \supset K$ kompakt: $\sup_{f \in \mathcal{F}} p_K(f) < \infty$

$\Longleftrightarrow \forall \, K \subset X \, \exists M_K < \infty : \forall \, x \in K \forall \, f \in \mathcal{F} : \; |f(x)| \leq M_K$

Bemerkung 6.4.5. *$\mathcal{F}$ beschränkt $\Longrightarrow \mathcal{F}$ punktweise beschränkt,*
dh. $\forall x \in X : \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| < \infty$

Beweis : $x \in X \Longrightarrow K := \{x\}$ kompakt. $p_K(f) := |f(x)|$ □

Satz 6.4.6. *von Arzela-Ascoli*

(X,d) metrisch, lokalkompakt, abzählbare Basis

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ kompakt gleichstetig und punktweise beschränkt

$\Longrightarrow \bar{\mathcal{F}}$ folgenkompakt, dh.

Jede Folge $f_n \in \mathcal{F}$ hat Teilfolge $f_\alpha(u)$, welche kompakt konvergiert.

Beweis :

X hat abzählbare Basis $\Longleftrightarrow \exists$ Folge $x_j \in X$, $\{x_j,\, j \in \mathbb{N}\} \underset{\text{dicht}}{\subset} X$

Sei $f_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F}$ punktweise beschränkt $\Longrightarrow \{f_n x_{0n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ beschränkt.

$\Longrightarrow$ existiert Teilfolge $\alpha_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ streng isoton, so dass $f_{\alpha_0(n)}(x_0) \rightsquigarrow$

$(f_{\alpha_0(n)}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\subset \mathbb{C}$, da $\mathcal{F}|_{x_1}$ beschränkt

$\Longrightarrow \exists\, \alpha_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_{\alpha_0(\alpha_1(n))}(x_1) \rightsquigarrow$

$f_{\alpha_0(\alpha_1(n))}(x_0) \rightsquigarrow$, da Teilfolge von $f_{\alpha_0(n)}(x_0)$

$\vdots$

$\Longrightarrow \exists \alpha_j : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ so dass

$f_{\alpha_0\circ\cdots\circ\alpha_j(n))}(x_i) \rightsquigarrow \quad \forall\, 0 \leq i \leq j$

Cantor-Diagonalverfahren:

$\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\alpha(n) := \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n(n)$

Beh.: $\forall j \in \mathbb{N} : f_{\alpha(n)}(x_j) \rightsquigarrow$

Bew.: Sei j fest $\Longrightarrow \alpha(n) = \alpha_0 \circ \cdots \circ \alpha_n(n)$ ist Teilfolge von $\alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_j(n)$ für $n \geq j$

Da $f_{\alpha_0\circ\cdots\circ\alpha_j(n)}(x_j) \rightsquigarrow$

$\Longrightarrow f_{\alpha(n)}(x_j) \rightsquigarrow$ (Teilfolge ab $n \geq j$) Beh. bewiesen

$\mathcal{C}(X,\mathbb{C}) \supset \mathcal{F}$ kpkt gleichstetig, beschränkt, $\mathcal{F} \ni f_n$, $x_j \in X$ dicht, $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$f_{\alpha(n)}(x_j) \rightsquigarrow \forall j \in \mathbb{N}$

zz: $f_{\alpha(n)} \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow}$ kompakte Konvergenz

Sei $X \supset H$ kompakt, also zz: $f_{\alpha(n)}|_H \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow}$

Sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists X \underset{kpkt}{\supset} K \supset \mathring{K} \supset H$ $\mathcal{F}|_K$ gleichstetig $\Longrightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall\, x, y \in K : d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow$ $\forall\, f \in \mathcal{F} : |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Œ: $\delta \leq dist(H, \partial K)$

Da $x_j \in X$ dicht $\Longrightarrow$ kompakt $H \subset \bigcup_j B_\delta(x_j)0X$

$\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \forall x \in H \, \exists j = j_x \leq k,\ x \in B_\delta(x_{j_x}),$ da $H \subset \bigcup_{0 \leq j \leq k} B_\delta(x_j)$

$\forall 0 \leq j \leq k : f_{\alpha(n)}(x_j) \rightsquigarrow \Longrightarrow_{\text{Cauchy simultan für } 0 \leq j \leq k}$

$\exists \, l \in \mathbb{N} \forall m, n \geq l \, \forall 0 \leq j \leq k |f_{\alpha(n)}(x_j) - f_{\alpha(m)}(x_j)| \leq \varepsilon$

Wegen $\delta \leq dist(H, \partial K)$ gilt $\forall x \in H : x_{j_x} \in K$, da $d(x, x_{j_x}) < \delta$

$\Longrightarrow x \in H$ beliebig, fest $\forall m, n \geq l \, |f_{\alpha(n)}(x) - f_{\alpha(m)}(x)| \leq |f_{\alpha(m)}(x) - f_{\alpha(n)}(x_{j_x})| + |f_{\alpha(n)}(x_{j_x}) - f_{\alpha(m)}(x_{j_x})| + |f_{\alpha(m)}(x_{j_x}) - f_{\alpha(n)}(x)|$

$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$ da

1. $\mathcal{F}$ gleichstetig und $d(x, x_{j_x}) \leq \delta$
2. $j_x \leq k$

$\Longrightarrow \forall m, n \geq l : \sup_{x \in H} |f_{\alpha(n)}(x) - f_{\alpha(m)}(x)| \leq 3\varepsilon$

$\Longrightarrow_{(Cauchy)} f_{\alpha(n)}|H \rightsquigarrow$

$\Longrightarrow_{H\, beliebig} f_{\alpha(n)} \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow}{}_x$

$\square$

Proposition 6.4.7. *$D \underset{offen}{\subset} \mathbb{C}$, $\mathcal{O}(D, \mathbb{C}) \supset \mathcal{F}$ kompakt beschränkt*

$\Longrightarrow \mathcal{F}$ (kompakt) gleichstetig.

Beweis : Sei $D \supset H$ kompakt

zz: $\mathcal{F}|H$ glst.

$\Longrightarrow \exists$ kompaktes K mit $D \supset K \supset \mathring{K} \subset H$

wähle r so dass $0 < dist(H, \partial K) = 2r > 0$

$\forall z, w \in H,\ |z - w| < r :$

$|f(w) - f(z)| = |\int_0^1 f'\underbrace{(w + t(z - w))}_{\in K} \cdot (z - w)| \leq |z - w| \sup_{\xi \in [z,w]} |f'(\rho)| \leq |z - w| \cdot \frac{1}{r} \cdot \sup_K |f| = \frac{p_K 8 f)}{r} |z - w|$ da $B_r(\rho) \subset K$

Also gilt $|f(z) - f(w)| = \frac{p_K(f)}{r} |z - w| < \varepsilon \, \forall z, w \in H,\ |z - w| \leq \delta \leq r$

$(\Longrightarrow \delta \leq \frac{r \cdot \varepsilon}{M_K}$, wobei $M_K = \sup_{f \in \mathcal{F}} p_K(f) < \infty)$ $\square$

Satz 6.4.8. *von Montel*

$\mathcal{O}(D, \mathbb{C}) \underset{abg.}{\supset} \mathcal{F}$ (punktweise) beschränkt

$\Longrightarrow \mathcal{F}$ kompakt

Bemerkung 6.4.9. *Die Umkehrung gilt trivial*

Beweis :

Sei $\mathcal{F}$ abgeschlossen und beschränkt

$_{Prop} \Longrightarrow$

$\mathcal{F}$ kompakt gleichstetig,

$\mathcal{F}$ punktweise beschränkt,

D abzählbare Basis $(D \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$

$\Longrightarrow$ Jede Folge $f_n \in \mathcal{F}$ hat kompakt konvergente Teilfolge $\mathcal{F} \ni f_{\alpha(n)} \underset{\text{kpkt}_D}{\longrightarrow} f \in \bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$

Also ist $\mathcal{F}$ folgenkompakt.

Da $\mathcal{F}$ metrisierbar $\Longrightarrow \mathcal{F}$ kompakt. $\square$

Beweis der Umkehrung:

$\mathcal{F}$ kpkt $\Longrightarrow \mathcal{F}$ abgeschlossen

$\forall K \subset D : p_K : \mathcal{O}(D, \mathbb{C}) \underset{stetig}{\longrightarrow} \mathbb{R}_+$

$\Longrightarrow p_K(\mathcal{F})$ kompakt $\subset \mathbb{R}_+ \Longrightarrow p_K(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}_+$ beschränkt

Also $\mathcal{F}$ beschränkt. $\square$

6.5 Der Riemannsche Abbildungssatz

$\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ Einheitskreis

$\Longrightarrow \mathbb{B}$ konvex $\Longrightarrow$ 1-zusammenhängend (einfach zusammenhängend)

Satz 6.5.1. $\mathbb{C} \neq D$ *Gebiet, 1-zusammenhängend*

$\Longrightarrow \exists F : D \longrightarrow \mathbb{B}$ *biholomorph*

Beweis :

Schritt 1:
Sei D einfach zusammenhängend, dann gilt: $\Longrightarrow \forall F \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C}\backslash\{0\}) \, \exists \tilde{F} \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$ mit $exp \circ \tilde{F} = F$

$\frac{F'}{F} \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$, $\gamma \in \mathcal{C}(S, D)$ geschlossene Kurve in D, stückweise glatt

$\Longrightarrow \gamma \equiv_D pt$ null homotop, da D 1-zusammenhängend

$\Longrightarrow \gamma$ null-homolog in D

d.h. $\forall o \notin D : Ind_o \gamma = Ind_o(pt) = 0$

$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{dF}{F} = \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 0$

Da γ beliebig und geschlossen, $\frac{dF}{F} = dG$ (integrabel)

$G \in \mathcal{O}(D,\mathbb{C})$, $(\exp G)(z) = c \cdot F(z)$ $c = \exp(a)$ für $a \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ $\tilde{F}(z) = G(z) - a$, $\tilde{F} \in \mathcal{O}(D,\mathbb{C})$
$\Longrightarrow \exp \tilde{F}(z) = \frac{\exp G(z)}{\exp(a)} = \frac{\exp(G(z))}{\exp(a)} = \frac{\exp(G(z)}{c} = F(z) \Longrightarrow \exp \circ \tilde{F} = F$

Schritt 2

D1−zshg.

zz:
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\exists \check{F}\text{hol}"] \arrow[dr, "\forall F\text{hol}"'] & \mathbb{C}\backslash(0) \arrow[d, "(.)^2"] \\ & \mathbb{C}\backslash(0) \end{tikzcd}$$

dh.: $\forall F \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C}\backslash\{0\}) \exists \check{F} \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C}\backslash\{0\})$ mit $\check{F}^2 = F$

Bew.: nach Schritt 1 existiert $\tilde{F} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp \tilde{F}(z) = F(z)$

$\check{F}(z) = \exp \frac{1}{2} \tilde{F}(z) \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C}\backslash\{0\})$ $(\check{F}(z))^2 = \exp \tilde{F}(z) = F(z)$

Schritt 2 bewiesen

Bem: F injektiv $\Longrightarrow \check{F}$ injektiv $(Bew. : F = ()^2 \circ \check{F})$

$F(D) \subset \mathbb{B}\backslash\{0\} \Longrightarrow \check{F}(D) \subset \mathbb{B}\backslash\{0\}$ $(Bew. : |F(z)| = |\check{F}(z)|^2)$

Schritt 3

Sei D 1-zusammenhängend, also existiert nach Schritt 2 die Wurzel

Angenommen $0 \in D \subset \mathbb{B}$

$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{B}) : f(0) = 0,\ f$ injektiv (schlicht), $|f'(0)| \geq 1\}$

$\emptyset \neq \mathcal{F} \ni id =$ Inklusion: $D \longrightarrow \mathbb{B}$: $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D,\mathbb{C})$ beschränkt, da $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$ beschränkt

$\Longrightarrow \bar{\mathcal{F}}$ (folgen)kompakt wegen Satz von Montel

zz: $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}} \ni f \Longrightarrow \exists f_n \in \mathcal{F}$ mit $f_n \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow} f$ auf D

$\Longrightarrow f \in \mathcal{O}(D,\mathbb{C})$ nach Weierstrass ausserdem: $f(0) = \lim_n f_n(0) = 0$;

$|f'(0)| = \lim_{n\to\infty} |f_n'(0)| \geq 1$ ebenfalls nach Weierstrass

$\forall n : f_n(D) \subset \mathbb{B} \Longrightarrow f(D) \subset \bar{\mathbb{B}}$ nach Maximumprinzip ist $f(D)$ offen in $\bar{\mathbb{B}}$, denn f nicht konstant wegen $f'(0) \neq 0 \Longrightarrow f(D) \subset \mathring{\bar{\mathbb{B}}} = \mathbb{B}$, da konvex

$\Longrightarrow f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{B})$

$\forall n : f_n$ injektiv, $f_n \underset{\text{kpkt}}{\longrightarrow} f$ auf D nach Prop 4 (Residuensatz)$\Longrightarrow f$ injektiv

Also $f \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F}$ abgeschlossen, dh. kompakt.

kompakt $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D,\mathbb{C})$ $\frac{d}{dz}|_{z=0} : \mathcal{O}(D,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto f'(0)$ stetig (nicht nur folgenstetig) (Weierstrass)

$\Longrightarrow \exists F \in \mathcal{F}$ so dass $|F'(0)| = max_{f\in\mathcal{F}} |f'(0)|$

Beh.: $F : D \longrightarrow \mathbb{B}$ biholomorph

Bew.: $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow F$ holomorph, injektiv und $F(D) \subset \mathbb{B}$ noch zz: F surjektiv, denn F^{-1} dann holomorph nach Residuen-Satz

Annahme: $F(D) \neq \mathbb{B} \Longrightarrow \exists\, b \in \mathbb{B} \backslash F(D)$

$g_b(z) = \frac{z-b}{\bar{b}z-1}$, $g_b(0) = b$, $g_b(b) = 0$, $g_b \in Aut(\mathbb{B})$ d.h. biholomorph $g_b \circ g_b = id_{\mathbb{B}}$

$0 \notin g_b(F(D))$, wegen $b \notin F(D) \Longrightarrow g_b \circ F \longrightarrow \mathbb{B} \backslash \{0\}$ holomorph, injektiv

$\Longrightarrow \exists G : D \longrightarrow \mathbb{B} \backslash \{0\}$ holomorph und injektiv mit $G \circ ()^2 = g_b \circ F$

$a = G(0) \in \mathbb{B} \backslash (0)$ $a^2 = G(0)^2 = (g_b \circ F)(0) = g_b(F(0)) = g_b(0) = 0$, da $F \in \mathcal{F}$

$g_a \circ G \in \mathcal{O}(D, \mathbb{B})$ injektiv

zz: $g_a \circ G \in \mathcal{F}$, $|(g_a \circ G)'(0)| > |F'(0)|$

$(g_a \circ G)(0) = g_a(G(0)) = g_a(a) = 0$

$F = id \circ F = g_b \circ g_b \circ F = g_b \circ (g_b \circ F) = g_b \circ ((.)^2 \circ G) = g_b \circ (.)^2 \circ G = g_b \circ (.)^2 \circ g_a \circ g_a \circ G$
$= (g_b \circ ()^2 \circ g_a) \circ (g_a \circ G) = F$

$\Longrightarrow 1 \leq |F'(0)| = |g_b \circ (.)^2 \circ g_a)'(g_a \circ G)(0)| \cdot |(g_a \circ G)'(0)| = |(g_b \circ ()^2 \circ g_a)'(0)| \cdot |(g_a \circ G)'(0)| = \frac{2|a|}{1+a^2} < 1$ wegen $|a| < 1$

$\Longrightarrow |F'(0)| < |(g_a \circ G)'(0)| \Longrightarrow g_a \circ G \in \mathcal{F}$ Widerspruch, da $|F'(0)|$ das Maximum aller Ableitungen im Nullpunkt in $\mathcal{F}$ ist

Also $F(D) = \mathbb{B} \Longrightarrow F$ bijektiv $\Longrightarrow F$ biholomorph

<u>Schritt 4</u>

Sei $\mathbb{C} \ni a \notin D \Longrightarrow 0 \notin D - a$ 1-zusammenhängend

$id : D - a \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph und injektiv

$G : D - a \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $G \circ ()^2 = id$

Wähle $c \in G(D - a) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}\backslash\{0\}$ nach Max.-Prinzip

$\Longrightarrow c \neq 0, \exists r > 0, B_r(c) \subset G(D - a)$

Beh: $\forall\, \zeta \in G(D - a), |\zeta + c| \geq r (\Longrightarrow 2|c| \geq r, \zeta = c)$

Widerspruchsannahme:

$\exists\, \zeta \in G(D-a), |\zeta+c| < r \Longrightarrow -\zeta \in B_r(c)$, denn $|-\zeta-c| = |\zeta+a| < r \Longrightarrow -\zeta \in G(D-a) \Longrightarrow$
$\exists\, z \in D - a \ni w$: $G(z) = \zeta, G(w) = -\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$\Longrightarrow G(z) = -G(w) \neq G(w) \Longrightarrow z \neq w$

andererseits:

$z = G(z)^2 = (-G(w))^2 = G(w)^2 = w$ Widerspruch !

Also gilt: $\zeta \in G(D - a) \Longrightarrow |\zeta + c| \geq r \leq 2|c|$

$\varphi : G(D - a) \longrightarrow \mathbb{B}$ holomorph und injektiv

$\varphi(\zeta) = \frac{r}{2}(\frac{1}{\zeta+c} - \frac{1}{2c}) \Longrightarrow |\varphi(\zeta)| \leq 1 \Longrightarrow \varphi(G(D - a)) \subset \mathbb{B}$

$id - a : D \longrightarrow D - a;\ G : D - a \longrightarrow G(D - a),\ \varphi : G(D - a) \longrightarrow \varphi(G(D - a)) \ni 0 = \varphi(c)$
$F : \varphi(G(D - a)) \longrightarrow \mathbb{B}$

$F \circ \varphi \circ G \circ (id - a)$ ist also als Verkettung holomorpher Funktionen wieder holomorph von D nach $\mathbb{B}$

$\square$