Die komplexen Zahlen als Körper aus Drehstreckmatrizen

Kristof L. Beck

27.04.2009

In der Vorlesung wurden die komplexen Zahlen als 2-Tupel aus reellen Zahlen mit der üblichen Vektoraddition und einer speziellen Multiplikation eingeführt.
Beim Zusammenhang von komplexer und reeller Differentiation trat dann an die Stelle der komplexen Zahl $f'(z_0)$ als Ableitung in einem Punkt die reelle Jacobi-Matrix, die (für holomorphe Funktionen) die Gestalt einer Drehstreckmatrix hat.
Dies wirkt weniger überraschend, wenn man die folgende Möglichkeit, die komplexen Zahlen einzuführen, kennt:
Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen.
Zunächst überlegt man sich, dass $\mathcal{C}$ ein Körper ist. Dabei sieht man schnell ein, dass die additiven Eigenschaften

- Assoziativität
- Kommutativität
- Existenz der Null: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$
- Existenz des Inversen: $-\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$

direkt aus Eigenschaften der Matrixaddition folgen. Außerdem ist $\mathcal{C}$ abgeschlossen bezüglich der Addition, das heißt, die Summe zweier Drehstreckmatrizen ist wieder eine Drehstreckmatrix. Auch die Matrixmultiplikation ist assoziativ, jedoch im Allgemeinen nicht kommutativ. Hier gilt jedoch:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt auch, dass $\mathcal{C}$ bezüglich der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Das multiplikativ-neutrale Element ist die Einheitsmatrix. Man sieht sofort, dass sie in $\mathcal{C}$ liegt. Eine einfache Methode, die Inverse einer (invertierbaren) 2×2-Matrix zu bestimmen (die man sich auch unabhängig von der Funktionentheorie merken sollte), ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Für $A \in \mathcal{C}\backslash\{0\}$ ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{C}.$$

Eine nicht viel schwerere, aber mühsamere Rechnung zeigt auch die Gültigkeit des Distributivgesetzes.
Nun betrachten wir die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathcal{C}, z = x+iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Die Bijektivität von φ ist offensichtlich. Des Weiteren ist für $z = x+iy$, $w = a+ib \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\varphi(z)+\varphi(w) &= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+a & -(y+b) \\ y+b & x+a \end{pmatrix} \\
&= \varphi((x+iy)+(a+ib)) \\
&= \varphi(z+w), \\
\varphi(z)\cdot\varphi(w) &= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xa-yb & -(xb+ya) \\ xb+ya & ax-by \end{pmatrix} \\
&= \varphi((xa-yb)+i(xb+ya)) \\
&= \varphi((x+iy)(a+ib)) \\
&= \varphi(zw),
\end{aligned}$$

das heißt, Addition und Multiplikation vor oder nach Raumwechsel entsprechen einander. φ ist ein Körperisomorphismus.
Die Darstellung der Basis $\{1, i\}$ von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ ist

$$1 \equiv \varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad i \equiv \varphi(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathcal{C}$ und die reellen Zahlen lassen sich einbetten in der Form

$$\varphi(x + i \cdot 0) = x\varphi(1) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

Die komplex konjugierte Zahl von $z = x + iy$ stellt sich dar als

$$\varphi(\bar{z}) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \varphi(z)^T.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z\bar{z} \equiv \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \equiv x^2 + y^2 \in \mathbb{R} \\ |z|^2 &= \det(\varphi(z)) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kehrt man nun zurück zur Motivation des hier gezeigten, dem Vergleich von komplexer und reeller Differenzierbarkeit, so sieht man, dass gilt:

$f = (u, v)$ ist in p komplex differenzierbar.	$\Leftrightarrow$	(u, v) ist in p reell total differenzierbar und die Funktionalmatrix entspricht einer $\mathbb{C}$ -Zahl.

Der Beweis des entsprechenden Satzes in der Vorlesung zeigt, dass für f differenzierbar in z mit $f'(z) = a + ib$ gilt

$$\varphi(f'(z)) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$