Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Funktionentheorie I

– Alternativklausur –

Dienstag, 1.9.2009, 10:15-11:45 Uhr, HS A, Chemie

Name, Vorname ______________________

Matrikelnummer ______________________

Studiengang ______________________

Wichtig, bitte beachten:

- Füllen Sie das Deckblatt aus.
- Geben Sie stichpunktartig Begründungen für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
- Zusätzliches Papier bei der Aufsicht.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte	4	6	4	4	4	4	26
Erreicht							

Notenpunkte (Note): __________

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die entsprechende Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen halben Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen halben Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Ist die Gesamtpunktzahl negativ, so wird zu Null aufgewertet.

1. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ winkeltreu.

   richtig ☐ *falsch* ☐

2. Die Taylorreihe einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um $p \in \mathbb{C}$ hat Konvergenzradius ∞.

   richtig ☐ *falsch* ☐

3. Für jede geschlossene Kurve γ in $\mathbb{C}^*$ gilt $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$. *richtig* ☐ *falsch* ☐

4. Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ lässt sich holomorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzen.

   richtig ☐ *falsch* ☐

5. Auf der oberen Halbebene $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$ gibt es eine Logarithmusfunktion.

   richtig ☐ *falsch* ☐

6. Für eine auf $\overline{B_1(0)}$ stetige und auf $B_1(0)$ holomorphe Funktion f gilt $|f(z)| \leq |f(w)|$ für alle $z \in B_1(0)$ und für alle $w \in \partial B_1(0)$.

   richtig ☐ *falsch* ☐

7. Falls die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ im Nullpunkt einen Pol hat und die holomorphe Funktion $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ im Nullpunkt eine wesentliche Singularität hat, dann hat die Summe $f + g$ im Nullpunkt eine wesentliche Singularität.

   richtig ☐ *falsch* ☐

8. Möbiustransformationen bilden Geraden auf Geraden ab. *richtig* ☐ *falsch* ☐

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Geben Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine **kurze Begründung** oder ein **Gegenbeispiel** an. (Antworten ohne Begründung oder Gegenbeispiel ergeben keine Punkte; falsche Antworten ergeben keinen Punktabzug.)

a) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, so ist $1/f$ konstant.

b) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z) = 0$ für $z \in \mathbb{Z}$, so ist $f = 0$.

c) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\operatorname{Im} f(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f konstant.
Hinweis: Kombinieren Sie f mit der Cayley-Abbildung.

d) Ist $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation mit $f(0) = 0$, $f(1) = i$ und $f(-1) = -i$, so ist $f(\mathbb{R})$ eine Gerade.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, falls

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

gilt für alle $(x,y) \in U$. Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C},\ x+iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$ harmonische Funktionen sind.

b) Entscheiden Sie, ob die folgende Funktion Realteil einer holomorphen Funktion ist:

$$u(x,y) = y \sin x + x \cos y\ .$$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x}$$

für $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf $B_1(0)$ holomorph ist.

a) Drücken Sie die Entwicklungskoeffizienten von f in der Potenzreihenentwicklung um 0 durch ein Integral über $\partial B_1(0)$ aus.

b) Zeigen Sie: Falls f auf $\partial B_1(0)$ konstant ist, dann ist f auf ganz $\overline{B_1(0)}$ konstant.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Es sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Hat $|f|$ ein lokales Minimum in $p \in G$ mit $f(p) \neq 0$, so ist f konstant.

Hinweis: Betrachten Sie $g = 1/f$ in einer geeigneten Umgebung von p.

Zusatzblatt