Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 4 –

Abgabe Dienstag, 12.05.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 13 (*Cauchyscher Integralsatz*). (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $p \in U$ eine komplexe Zahl und $f : U \setminus \{ p \} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Weiterhin sei $\Delta \subset U$ ein Dreieck mit $p \in \overset{\circ}{\Delta}$ und $B \subset U$ eine Kreisscheibe mit $p \in \overset{\circ}{B}$. Zeigen Sie:

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial B} f \ .$$

(Mit $\overset{\circ}{A}$ bezeichnen wir das Innere einer Menge $A \subset \mathbb{C}$.)

Aufgabe 14 (*Cauchysche Integralformel*). (4 Punkte)
Es sei p eine komplexe Zahl mit $|p-1| \neq 1$ und $|p+1| \neq 1$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{\partial B_1(p)} \frac{1}{z^2-1}\, dz$$

a) durch Partialbruchzerlegung $\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1}$ mit geeigneten $A, B \in \mathbb{C}$,

b) mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel.

(*Hinweis:* Unterscheiden Sie die Fälle $1 \in B_1(p)$, $-1 \in B_1(p)$ und $\pm 1 \notin B_1(p)$)

Aufgabe 15 (*Konvergenzradius von Potenzreihen*). (4 Punkte)

a) Sei eine Folge komplexer Zahlen $a_n \neq 0$ gegeben. Beweisen Sie das folgende Kriterium für den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$:
Falls der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{ \infty \}$ existiert, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} 0 & \text{, falls } R = \infty \\ \infty & \text{, falls } R = 0 \\ \frac{1}{R} & \text{, sonst} \end{cases} .$$

(Hinweis: Quotientenkriterium.)

b) Seien a und b reelle Zahlen mit $0 < a \leq b$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n := \begin{cases} a^n & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ b^n & \text{falls } n \text{ ungerade .} \end{cases}$