Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 7 –

Abgabe Dienstag, 02.06.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 23. (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob es holomorphe Funktionen $f_i : B_1(0) \to \mathbb{C}$ gibt mit

a) $f_1(\frac{1}{2n}) = f_1(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

b) $f_2(\frac{1}{n}) = f_2(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$.

c) $f_3^{(n)}(0) = (n!)^2$, $n \geq 0$.

d) $f_4^{(n)}(0) = \frac{n!}{n^2}$, $n \geq 0$.

Aufgabe 24 (*Schwarzsches Lemma*). (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{E} := B_1(0)$. Zeigen Sie:

a) Für jedes $v \in \mathbb{E}$ definiert

$$\psi_v : \mathbb{E} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \psi_v(z) := \frac{z-v}{1-\bar{v}z}\ .$$

eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{E}$ mit Inversen $\psi_v^{-1} = \psi_{-v}$.

b) Ist $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine biholomorphe Abbildung, so gibt es ein $v \in \mathbb{E}$ und ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = e^{i\varphi} \cdot \frac{z-v}{1-\bar{v}z}$$

Hinweis: Betrachten Sie $g := f \circ \psi_{-v}$ für eine geeignetes $v \in \mathbb{E}$.

Aufgabe 25 (*Elementare Funktionen*). (4 Punkte)

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$?

b) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen alle Nullstellen sowie deren Nullstellenordnung.

(i) $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \cosh(z)$,

(ii) $\cos - \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \cos(z) - \sin(z)$.