Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 8 –

Abgabe Dienstag, 09.06.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 26 (*Umlaufzahlen I*). (4 Punkte)
Skizzieren Sie die folgenden Wege γ_i, $i = 1, 2$, und bestimmen Sie die Umlaufzahlen in den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\gamma_i)$.

a) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2\cos(2t)e^{it}$,

b) $\gamma_2 : [0, 3] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \begin{cases} 2(1-t)e^{2\pi it} & \text{falls } t \in [0,1] \\ e^{-\pi i(t-1)} - 1 & \text{falls } t \in [1,2] \\ 4t - 10 & \text{falls } t \in [2,3] \end{cases}$.

Aufgabe 27 (*Umlaufzahlen II*). (4 Punkte)

a) Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^*$ ein geschlossener Integrationsweg, m eine natürliche Zahl und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^m$. Zeigen Sie

$$n(g \circ \gamma, 0) = m \cdot n(\gamma, 0) \ .$$

b) Es seien $D, D' \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : D \to D'$ eine biholomorphe Abbildung. Weiterhin sei $c \in D$ und $\gamma : [0, 1] \to D$ ein geschlossener Integrationsweg mit $c \notin \mathrm{Bild}\gamma$ und $\mathrm{Int}\gamma \subset D$. Zeigen Sie

$$n(f \circ \gamma, f(c)) = n(\gamma, c) \ .$$

Hinweis: Benutzen Sie die Umlaufversion der CIF für die Abbildung

$$h : z \mapsto \begin{cases} f'(z)\frac{z-c}{f(z)-f(c)} & \text{falls } z \in D \setminus \{ c \} \\ 1 & \text{falls } z = c \end{cases} .$$

Aufgabe 28 (*Fundamentalgruppe*). (4 Punkte)
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in D$ und M die Menge aller geschlossenen Integrationswege $\gamma : [0, 1] \to D$ mit Anfangs- und Endpunkt $\gamma(0) = p = \gamma(1)$. Zwei Integrationswege $\gamma_1, \gamma_2 \in M$ seien äquivalent ($\gamma_1 \sim \gamma_2$), wenn sie homotop zueinander sind. Zeigen Sie, dass durch

$$[\gamma_1] * [\gamma_2] := [\gamma_1\gamma_2] \qquad \text{mit} \qquad \gamma_1\gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & , \ 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & , \ 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

eine Gruppenverknüpfung auf der Menge der Homotopieklassen $M/\!\sim$ definiert wird. Die Gruppe

$$\pi_1(D, p) := M/\!\sim$$

nennt man *Fundamentalgruppe* von D mit *Basispunkt* p.