Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer

Sommersemester 2009

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 9 –

Abgabe Dienstag, 16.06.2009, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 29 (*Holomorphe Wurzeln*). (4 Punkte)
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $f \neq 0$. Zeigen Sie:

a) Falls h eine holomorphe n-te Wurzel aus der konstanten Funktion $1 : D \to \mathbb{C}$ ist, so ist h die konstante Funktion $e^{k\frac{2\pi i}{n}}$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$.

b) Falls f eine holomorphe n-te Wurzel besitzt, dann besitzt f genau n verschiedene holomorphe n-te Wurzeln.

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{\tilde{h}}{h}$ für zwei unterschiedliche n-te Wurzeln $\tilde{h}$ und h.

Aufgabe 30 (*Typen isolierter Singularitäten I*). (4 Punkte)

a) Eine holomorphe Funktion $f \neq 0$ besitze in p eine Nullstelle der Ordnung m. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{f}$ einen Pol der Ordnung m in p hat.

b) Eine holomorphe Funktion $f : D \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ besitze im Punkt p einen Pol der Ordnung $m \geq 1$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{f}$ eine hebbare Singularität in p besitzt und dass die holomorphe Fortsetztung von $\frac{1}{f}$ eine Nullstelle der Ordnung m in p hat.

c) Zeigen Sie am Beispiel der Funktion $z \mapsto \sin\frac{1}{z}$, dass die folgende Aussage nicht allgemein gültig ist:

Eine Funktion f hat genau dann eine wesentliche isolierte Singularität im Punkt p, wenn auch $\frac{1}{f}$ eine wesentliche isolierte Singularität im Punkt p hat. $(*)$

d) Geben Sie eine zusätzliche Voraussetzung an f an, unter der die Aussage $(*)$ richtig wird und beweisen Sie dies.

Aufgabe 31 (*Typen isolierter Singularitäten II*). (4 Punkte)
Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen. Falls eine hebbare Singularität vorliegt, so bestimmen Sie eine holomorphe Fortsetzung. Falls ein Pol vorliegt, so bestimmen Sie die Polstellenordnung.

a) $f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z}$,

b) $f_2(z) = \frac{\cos(z)}{z}$,

c) $f_3(z) = \frac{\log(1+z)}{z^2}$ mit log = Hauptzweig des Logarithmus,

d) $f_4(z) = e^{\frac{1}{\sin(z)}}$.

Hinweis: Man kann nachweisen, dass eine wesentliche Singularität in p vorliegt, indem man Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to p$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n \to p$ angibt mit $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.

b/w

Aufgabe 32 (*Fundamentalgruppe von* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass durch die Umlaufzahl ein Isomophismus

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) \to \mathbb{Z},\ [\gamma] \mapsto n(\gamma, 0)$$

gegeben ist.

Hinweis zur Injektivität: Schreiben Sie $\gamma(t)$ als $\gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$ mit *stetigen* Funktionen $r : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ und $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ (dies darf ohne Beweis verwendet werden) und konstruieren sie stetige Funktionen $r_s(t)$ und $\varphi_s(t)$, $(r, s) \in [0,1] \times [0,1]$ mit $r_0(t) = r(t)$, $r_1(t) = 1$, $\varphi_0(t) = \varphi(t)$, $\varphi_1(t) = 0$.